Математика III

за трећи разред гимназије

Растко Вуковић, проф.

скрипта за наставу држану 2012-2013. ш. г. у Бањој Луци

Математика за III разред гимназије

Скрипта за наставу држану 2012-13. ш.г. у Бањој Луци.

Садржај

Математика за III разред гимназије 2
I Планиметрија 5
1. Тригонометрија 5
1.1. Основне особине 5
1.2. Јединична кружница 7
1.3. Адиционе формуле 8
1.4. Идентитети 9
1.5. Једначине 10
2. Многоуглови 12
2.1. Троугао 13
2.2. Правилни многоугао 14
2.3. Четвороугао 16
3. Круг 17
3.1. Површина 17
3.2. Тетива 20
4. Фигуре (задаци) 21
4.1. Положаји фигура 22
4.2. Паралелност 22
4.3. Нормалност 23
4.4. Ортогоналне пројекције 23
5. Рогаљ 24
5.1. Диједар 25
5.2. Триједар 27
5.3. Рогаљ 29
II Полиедри 31
6. Призма 32
6.1. Дужине и углови 32
6.2. Површина призме 34
6.3. Кавальеријев принцип 35
6.4. Запремина 37
7. Пирамида 38
7.1. Површине пирамиде 39
7.2. Запремина пирамиде 41
8. Зарубљена пирамида 45
8.1. Ивице 46
8.2. Површина зарубљене пирамиде 47
8.3. Запремина зарубљене пирамиде 48
9. Правилни полиедри 50
III Обртна тијела 57
10. Ваљак 58
10.1. Линије ваљка 59

10.2. Површина ваљка ... 61
10.3. Запремина ваљка ... 63
11. Купа ... 65
11.1. Конусни пресјеци ... 67
11.2. Површина купе ... 72
11.3. Запремина купе ... 74
12. Зарубљена купа ... 76
12.1. Површина зарубљене купе ... 77
12.2. Запремина зарубљене купе ... 79
13. Лопта ... 82
13.1. Површина лопте ... 83
13.2. Запремина лопте ... 85
IV Линеарна алгебра ... 90
14. Линеарне једначине ... 91
14.1. Примјери линеарних једначина ... 91
14.2. Гаусова метода елиминације ... 94
14.3. Обрнути задатак ... 99
15. Детерминанте ... 102
15.1. Детерминанта 2. реда ... 102
15.2. Детерминанта вишег реда ... 106
16. Вектори ... 113
16.1. Основне особине ... 114
16.2. Скаларни производ вектора ... 118
16.3. Векторски производ вектора ... 122
17. Матрице ... 127
17.1. Основне особине ... 127
17.2. Инверзна матрица ... 132
V Координате ... 137
18. Тачка и права ... 137
18.1. Дужина и површина ... 138
18.2. Једначине праве ... 140
18.3. Узајамни односи ... 144
18.4. Линеарне неједначине ... 151
18.5. Линеарно програмирање ... 153
19. Системи координата ... 157
19.1. Поларни систем ... 157
19.2. Тродимензионални системи ... 158
19.3. Трансформација координата ... 160
VI Аналитичка геометрија ... 165
20. Кружница ... 166
20.1. Једначине кружнице ... 166
20.2. Кружница и права ... 170
20.3. Двије кружнице ... 175
21. Елипса ... 179
21.1. Елементи елипсе ... 180
21.2. Елипса и права ... 183

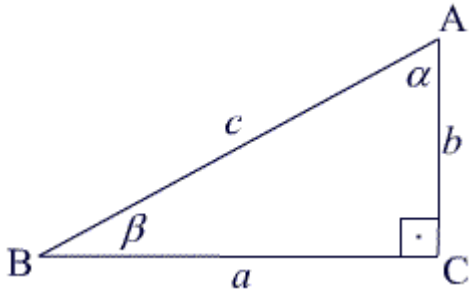
22. Парабола 190
22.1. Елементи параболе 190
22.2. Парабола и права 193
23. Хипербола 199
23.1. Елементи хиперболе 200
23.2. Хипербола и права 207
VII Низови 213
24. Математичка индукција 213
24.1. Низови исказа 213
25. Основни низови 224
25.1. Аритметички низ 225
25.1. Геометријски низ 226
26. Диференцне једначине 228
26.1. Линеарна првог реда 229
26.2. Једначина са константним коефицијентима 232
VIII Лимес низа 236
27. Реални низови 236
27.1. Конвергенција 237
27.2. Ограниченост 240
27.3. Особине 245
27.4. Број e 249
27.5. Геометријски ред 251
28. Комплексни бројеви 257
28.1. Алгебарска структура 258
28.2. Комплексна раван 261
28.3. Топологија 265

I Планиметрија

1. Тригонометрија

Основне **тригонометријске функције** дефинишемо на правоуглом троуглу.

$\sin\alpha = \frac{a}{c}$, $\cos\alpha\frac{b}{c}$, tg $\alpha = \frac{a}{b}$, ctg $\alpha = \frac{b}{a}$.



Основни **тригонометријски идентитети** су:

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, tg $\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, ctg $\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$,

$\sin\alpha = \cos\beta$, tg α = ctg β. Такође

$\cos\alpha = \frac{1}{\pm\sqrt{1+t^2}}$, $\sin\alpha = \frac{t}{\pm\sqrt{1+t^2}}$, где

t = tg α, за оштре углове 0-90° предзнак је +.

1.1. Основне особине

Основне формуле тригонометријских функција су нам познате још из I разреда средње школе и овдје ћемо их само поновити кроз примјере и задатке. То су дефиниција тригонометријских функција на правоуглом троуглу и пар теорема за рјешавање троуглова.

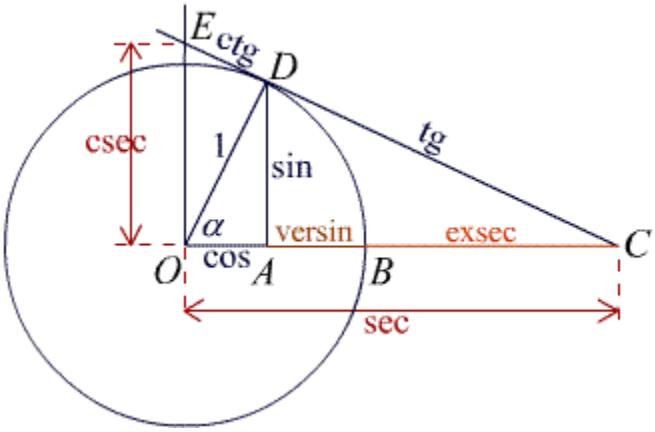
Задаци 1.1.1.

1. Користећи претходну слику:
а) Написати тригонометријске функције за угао бета;
б) Доказати основне тригонометријске идентитете.

2. Цртежима једнакостраничног троугла и квадрата, доказати:

α	**30°**	**45°**	**60°**
sin α	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos α	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg α	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Вриједности тригонометријских функиција се могу разумјети геометријски и помоћу јединичне кружнице, као на сљедећој слици.

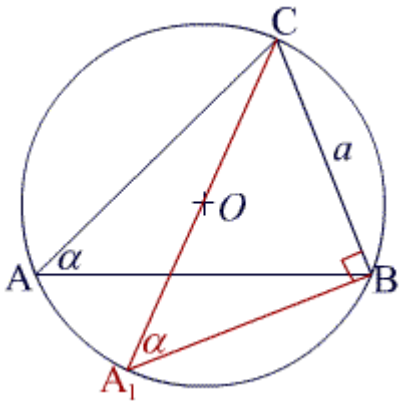


$AD = \sin\alpha$ - синус угла алфа,
$OA = \cos\alpha$ - косинус,
$CD = \operatorname{tg}\alpha$ - тангенс,
$DE = \operatorname{ctg}\alpha$ - котангенс,
$OC = \sec\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha}$ - секанс,
$OE = \operatorname{csec}\alpha = \dfrac{1}{\sin\alpha}$ - косеканс.
Затим, синус версус и екс секанс:
$AB = \operatorname{versin}\alpha = 1 - \cos\alpha$,
$BC = \operatorname{exsec}\alpha = \sec\alpha - 1$.

Насупрот страницама a, b и c троугла ABC налазе се углови α, β и γ. Полупречник кружнице уписане у троугао означимо са r а полупречник описане са R.

Примјер 1.1.2. Синусна теорема.

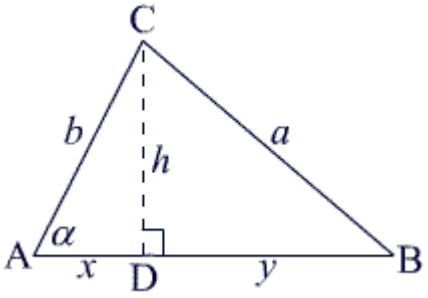
Доказати $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma} = 2R$



Доказ: На слици десно, ΔABC је уписан у круг пречника $2R = A_1C$. Угао над пречником $\angle A_1BC$ је прав, а углови $\angle A$ и $\angle A_1$ над истом тетивом BC су једнаки α. Зато је $\sin\alpha = \dfrac{a}{2R}$, тј. $\dfrac{a}{\sin\alpha} = 2R$.

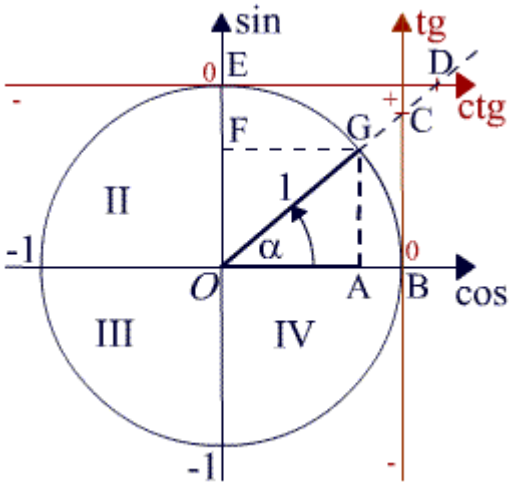
Аналогно добијамо $\dfrac{b}{\sin\beta} = 2R$ и $\dfrac{c}{\sin\gamma} = 2R$, па из транзитивности једнакости слиједи синусна теорема. ♦

Примјер 1.1.3. Доказати косинусну теорему:
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$,
$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$,
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$.



Доказ: На слици десно, висина h = CD троугла ABC дјели страницу c на одсјечке x и y. Према Питагориној теореми имамо $h^2 = a^2 - y^2 = b^2 - x^2$, па због $y = c - x$ слиједи $a^2 - (c^2 - 2cx + x^2) = b^2 - x^2$ и отуда $a^2 = b^2 + c^2 - 2cx$. Како је $x = b\cos\alpha$, то је доказана прва од једнакости. Аналогно, радимо са остале двије висине. ♦

1.2. Јединична кружница



Вриједности тригонометријских функција за углове веће од оштрих, или за негативне углове дефинишемо помоћу **тригонометријске кружнице**. То је кружница са полупречником 1 (јединична кружница) и центром у исходишту координатног почетка.

Апсциса и ордината су редом **косинусна** и **синусна оса**, тангенте у крајњој десној и горњој тачки кружнице су **тангенсна** и **котангенсна** оса.

$OA = \cos\alpha$ - **косинус** алфа, $OF = \sin\alpha$ - **синус**, $BC = \mathrm{tg}\,\alpha$ **тангенс**, $ED = \mathrm{ctg}\,\alpha$.

Радијан је дужина лука (BG) јединичне кружнице који се види под датим углом ($\angle$BOG) из центра круга. Обим јединичне кружнице је $2\pi \approx 6{,}28319$, а то је лук који се види под углом 360°. Према томе $2\pi = 360°$. Даље имамо $\pi = 180°$, $\frac{\pi}{2} = 90°$, $\frac{\pi}{3} = 60°$, $\frac{\pi}{4} = 45°$, $\frac{\pi}{6} = 30°$, и слично. Угао у радијанима се подразумијева.

У односу на непокретни крак угла *OB*, обрнуто смјеру казаљке на сату рачунамо угао до покретног крака OG кроз квадранте. Први квадрант (лук BE) чине углови од 0 до $\frac{\pi}{2}$, II квадрант од $\frac{\pi}{2}$ до π, III квадрант од π до $\frac{3\pi}{2}$, IV од $\frac{3\pi}{2}$ до 2π. На примјер, синус угла из II квадранта је позитиван, а косинус, тангенс и котангенс су негативни.

Функција је **парна** када $(\forall x)\ f(-x) = f(x)$. **Непарна** је ако $(\forall x)\ f(-x) = -f(x)$. Косинус је парна функција, а синус, тангенс и котангенс су непарне.

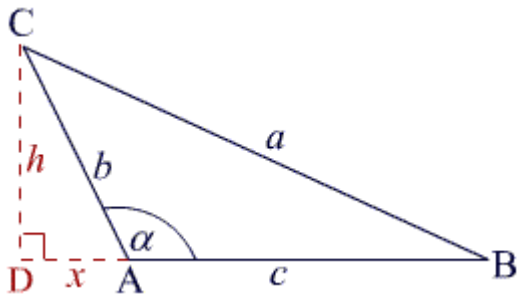
Задаци 1.2.1.

1. Провјерити табелу предзнака функција за углове у квадрантима:

Квадрант	**I**	**II**	**III**	**IV**
sin	+	+	-	-
cos	+	-	-	+
tg	+	-	+	-
ctg	+	-	+	-

2. Провјерити на тригонометријској кружници која од тригонометријских функција је парна, а која је непарна.

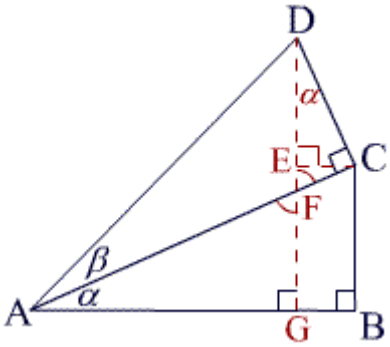
3. Доказати косинусну теорему на тупоуглом троуглу, на слици десно.



Напомена: Обратити пажњу да је ∠DAC суплементан са углом α. У каквој релацији су косинуси суплементних углова?

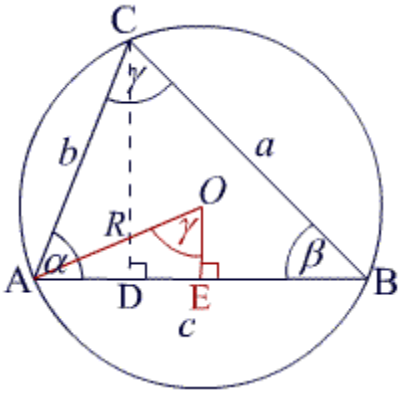
1.3. Адиционе формуле

Примјер1.3.1. Полазећи од слике десно, доказати адициону формулу за синус:
$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$.



Доказ: $\sin(\alpha+\beta)=\dfrac{GD}{AD}=\dfrac{GE+ED}{AD}=\dfrac{BC+ED}{AD}=$
$\dfrac{BC}{AC}\cdot\dfrac{AC}{AD}+\dfrac{ED}{CD}\cdot\dfrac{CD}{AD}=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$.♦

Примјер 1.3.2. Полазећи од сљедеће слике, доказати адиционе формуле за синус:
а) $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$;
б) $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$.



Доказ а) Ставимо да је полупречник описане кружнице $R=\dfrac{1}{2}$, па синусна теорема (примјер 1.3.) даје $\sin\alpha=a$, $\sin\beta=b$ и $\sin\gamma=c$. То исто и из слике десно; из ΔAEO: $\sin\gamma=\dfrac{c/2}{1/2}=c$, итд. Затим, имамо $c=AD+DB=b\cos\alpha+a\cos\beta=$ (синусна теорема) $=\sin\beta\cos\alpha+\sin\alpha\cos\beta$. Како је $c=\sin\gamma=\sin(\pi-(\alpha+\beta))=$ $=\sin(\alpha+\beta)$, добијамо тражену формулу. **б)** Из (а) слиједи $\sin(\alpha+(-\beta))=$ $\sin\alpha\cos(-\beta)+\cos\alpha\sin(-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$, јер је косинусна функција парна, а синусна непарна.♦

Примјер 1.3.3. Полазећи од адиционе формуле за синус, доказати адиционе формуле за косинус: $\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$, гдје горњи знак иде са горњим, а доњи са доњим.

Доказ: За горњи знак, имамо редом $\cos(\alpha+\beta)=\sin(\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta))=$ $\sin((\frac{\pi}{2}-\alpha)-\beta)=\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)\cos\beta-\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)\cos\beta=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$. За доњи знак $\cos(\alpha-\beta)=\sin((\frac{\pi}{2}-\alpha)-\beta)=\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)\cos\beta+\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)\sin\beta=$ $\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$.♦

Задатак 1.3.4. Доказати адиционе формуле за тангенс:
а) $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}$; **б)** $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}$.

1.4. Идентитети

Идентитети су једнакости са промјењивима (*x*-овима) које су скоро увијек тачне. На примјер, једнакост $\frac{1}{x}=\frac{2}{2x}$ је идентитет јер је тачна за сваки реални број *x*, осим за нулу.

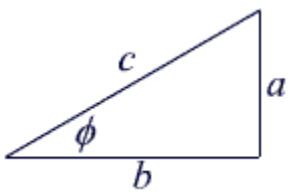
Задаци 1.4.1.

1. Доказати формуле за двоструке углове:
а) $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$; **б)** $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$; **в)** $\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\cdot\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$.

2. Доказати формуле за троструке углове:
а) $\sin 3\alpha=-4\sin^3\alpha+3\sin\alpha$; **б)** $\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$.

3. Доказати формуле за полууглове:
а) $\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$; **б)** $\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$;

Примјер 1.4.2. Ако је $t=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ доказати да је:
а) $\sin\alpha=\frac{2t}{1+t^2}$; **б)** $\cos\alpha=\frac{1-t^2}{1+t^2}$; **в)** $\operatorname{tg}\alpha=\frac{2t}{1-t^2}$.
Доказ: За правоугли троугао, на слици десно ставите $\phi=\frac{\alpha}{2}$, $a=2t$, $b=1-t^2$, а из Питагорине теореме $a^2+b^2=c^2$ слиједи $c=1+t^2$. Затим израчунајте синус, косинус и тангенс према основној дефиницији.♦



Задаци 1.4.3.

1. Доказати формуле за производ:
а) $2\sin\alpha\cos\beta=\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)$; **б)** $2\cos\alpha\sin\beta=\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)$;
в) $2\cos\alpha\cos\beta=\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)$; **г)** $2\sin\alpha\sin\beta=-\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)$.

Упутство: Из адиционих формула за синус $\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=$
$(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)-(\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta)=2\sin\alpha\cos\beta$, итд.

2. Доказати формуле за збир:
а) $\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$; **б)** $\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$;
в) $\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$; **г)** $\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$.

Упутство: Уведите смјену $\alpha=x+y$, $\beta=x-y$ па користите претходне формуле
$2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=2\sin\frac{(x+y)+(x-y)}{2}\cos\frac{(x+y)-(x-y)}{2}=2\sin x\cos(-y)=$
$2\sin x\cos y=\sin(x+y)+\sin(x-y)=\sin\alpha+\sin\beta$, итд.

1.5. Једначине

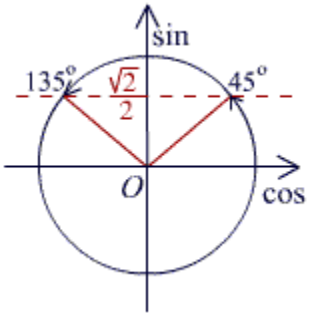
Једначине су једнакости са промјењивима (x-овиме) које су скоро увијек нетачне. Вриједности промјењивих које дају тачне једнакости називамо рјешењима, или корјенима једначина. На примјер, једнакост $2x+3=5$ је увијек нетачна, осим када је $x=1$.

Примјер 1.5.1. Наћи сва рјешења тригонометријских једначина:

а) $\sin(x+60°)=\frac{\sqrt{2}}{2}$; **б)** $\cos(x+\frac{\pi}{6})=\frac{1}{2}$;

в) $\operatorname{tg}(x-30°)=\sqrt{3}$; **г)** $\operatorname{ctg}(x-\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

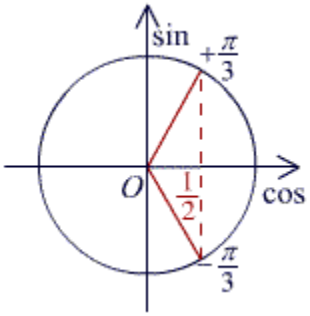
Рјешење: а) На синусној оси (ординати) нађимо вриједност $\frac{\sqrt{2}}{2}\approx 0{,}707$ и



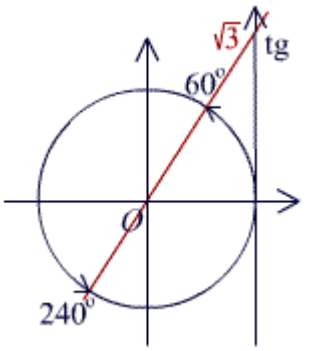
повуцимо паралелу са косинусном осом (апсцисом) кроз ту тачку (слика лијево). Пресјеци паралеле (испрекидано) и јединичне кружнице одређују углове 45° и 135°. То значи да једно рјешење слиједи из $x + 60° = 45°$, а друго из једнакости $x + 60° = 135°$. Додајући (одузимајући) добијеном рјешењу цијели број k пуних кругова, добијамо опет тачна рјешења. Према томе, сва рјешења добијамо из једнакости:

$$x + 60° = 45° + k\cdot 360° \text{ и } x + 60° = 135° + k\cdot 360°.$$

Рјешења су $x_1=-15°+k\cdot 360°$ и $x_2=75°+n\cdot 360°$ ($\forall k,n\in\mathbf{Z}$). **б)** Слично, имамо



паралелу са ординатом кроз тачку $\frac{1}{2}$ на косинусној оси (апсциси) и одговарајуће основне углове $\pm\frac{\pi}{3}$. Међутим, сваки пут када након пуног угла дођемо у исту позицију са покретним краком основног угла, његовим радијус вектором, имаћемо исти косинус. Према томе, рјешења су $x_{12} = \pm\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} + 2k\pi$, гдје је *к* произвољан цијели број.



в) Повучемо праву кроз исходиште *O* и тачку $\sqrt{3}$ тангенсне осе. Права одређује основне углове 60° и 240°, али се сва рјешења могу дефинисати помоћу само једног од њих:

$$x - 30° = 60° + k\cdot 180°.$$

Према томе, сва рјешења једначине су облика

$$x = 90° + k\cdot 180°,$$

гдје је *k* произвољан цијели број.

Примјер 1.5.2. Рјешити тригонометријске једначине за $-\pi \le x \le \pi$, приближно на двије децимале:

а) $3\sin^2 x - 5\cos x - 1 = 0$;
б) $2\cos^2 x + 3\sin x = 3$;
в) $\cos 2x + 9\cos x - 3 = 0$;
г) $\sin 2x = \sin x$.

Рјешење: а) $\Leftrightarrow 3\cos^2 x + 5\cos x - 2 = 0 \Leftrightarrow \cos x_1 = 1/3 \vee \cos x_2 = -2$. Само прво је прихватљиво. Рјешења су $x = \pm 1{,}23$.

Примјер 1.5.3. Ако је $a\sin\varphi + b\cos\varphi = c\sin(\varphi + \lambda)$ доказати да је тада $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ и $\lambda = \operatorname{arctg}\frac{b}{a}$.

Доказ: Из $c\sin(\varphi + \lambda) = c(\sin\varphi\cos\lambda + \cos\varphi\sin\lambda)$ па упоређивањем са лијевом страном дате једнакости слиједи $c\cos\lambda = a$ и $c\sin\lambda = b$. Квадрирањем и сабирањем добијамо $c^2 = a^2 + b^2$, те прву тражену једнакост, а дјељењем добијамо $\operatorname{tg}\lambda = \frac{b}{a}$, тј. $\lambda = \operatorname{arctg}\frac{b}{a}$. ♦

Примјер 1.5.4. Општа линеарна тригонометријска једначина. Наћи сва рјешења једначине: $a\sin x + b\cos x = c$.

Рјешење: Подјелимо једначину са $\pm\sqrt{a^2 + b^2}$, а предзнак бирајмо тако да је на десној страни једнакости резултат позитиван број:

$$\frac{a}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}\sin x+\frac{b}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}\cos x=\frac{c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Бројеви $\frac{a}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$ и $\frac{b}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$ су косинус и синус неког угла φ, јер је њихов збир квадрата 1. Према томе $\frac{a}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}=\cos\varphi$, $\frac{b}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}=\sin\varphi$, па је

$$\cos\varphi\sin x+\sin\varphi\cos x=\frac{c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}, \text{ тј.}$$

$$\sin(x+\varphi)=\frac{c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Према томе, дата једначина има рјешења ако и само ако је $-1\le\frac{c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}\le 1$. У случају да има рјешења, задатак се настави на начин као у примјеру 1.

Примјер 1.5.5. Дат је троугао ABC гдје је $\sin\alpha=\frac{4}{5}$, угао бета је туп и $\sin\beta=\frac{5}{13}$.

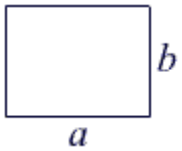
Наћи $\cos\gamma$ и $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, затим наћи углове трогула.

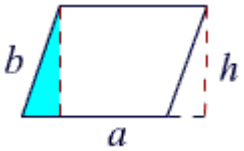
Рјешење: $\cos\gamma=\cos(\pi-(\alpha+\beta))=-\cos(\alpha+\beta)=-(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)=$ $-\left(\frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{12}{13}\right)-\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{13}\right)=\frac{36+20}{65}=\frac{56}{65}$. Из $\operatorname{tg}\alpha=\frac{4}{3}$ те $\frac{2t}{1-t^2}=\frac{4}{3}$ (примјер 1.4.2.), гдје је $t=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, добијамо квадратну једначину $2t^2+3t-2=0$ из које сљеде два рјешења $t=\frac{1}{2}$ и $t=-2$. Како је угао алфа оштар, то је $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}$.

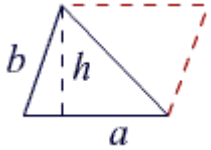
2. Многоуглови

Површина правоугаоника страница a и b је производ $P = a\cdot b$.
Правоугаоник је четвороугао у једној равни којем су сусједне странице окомите.

Правоугаоник $P=a\cdot b$ Паралелограм $P=a\cdot h$ Троугао $P=\frac{1}{2}ah$







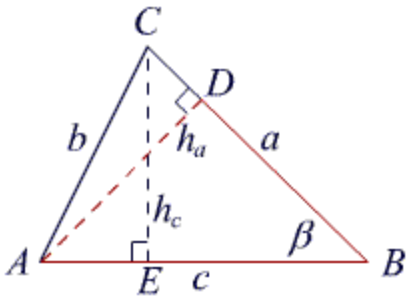
На средњој слици се види зашто је површина паралелограма једнака производу странице и висине на ту страницу.
Паралелограм дефинишемо као:

1. четвороугао са два пара паралелних страна, или
2. четвороугао са једним паром паралелних страна једнаких дужина, или
3. четвороугао којем се дијагонале полове.

Површина троугла је једнака половини производа странице и висине на њу.

2.1. Троугао

Правоугли троуглови ABD и CBE на слици десно су слични, јер им је исти и ∠B. Према томе је AB:AD = BC:CE, тј. $c{:}h_a = a{:}h_c$. Отуда $a{:}b{:}c = h_c{:}h_b{:}h_a$, тј. заиста су једнаке



2.1.1. Површине ΔABC:

$$P_\Delta = \frac{a\cdot h_a}{2} = \frac{b\cdot h_b}{2} = \frac{c\cdot h_c}{2}.$$

2.1.2. Из $h_a = c\cdot\sin\beta$, слиједи $P_\Delta = \frac{ac}{2}\sin\beta$. То је друга важна формула за израчунавање површине троугла, помоћу двије сусједне његове стране и угла између њих.

2.1.3. Херонов образац је трећа важна формула за површину троугла:

$P_\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, гдје је $s = \frac{a+b+c}{2}$ полуобим.

Доказ, из косинусне теореме (примјер 1.4.) $\cos\beta = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$ и претходне формуле имамо $P_\Delta = \frac{1}{2}ac\sin\beta = \frac{1}{2}ac\sqrt{1-\cos^2\beta} = \frac{1}{4}\sqrt{4a^2c^2-(a^2+c^2-b^2)^2} =$

$\frac{1}{4}\sqrt{\left(2ac-(a^2+c^2-b^2)\right)\left(2ac+(a^2+c^2-b^2)\right)} = \frac{1}{4}\sqrt{\left(b^2-(a-c)^2\right)\left((a+c)^2-b^2\right)} =$

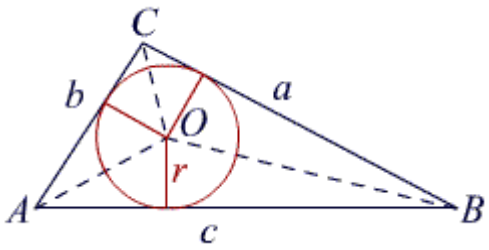
$\frac{1}{4}\sqrt{(b-a+c)(b+a-c)(a+c-b)(a+c+b)} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.♦

Задатак 2.1.4. Доказати Херонов образац помоћу Питагорине теореме.

2.1.5. $P_\Delta = \frac{abc}{4R}$, гдје је *R* полупречник описане кружнице око троугла.

Слиједи из синусне теореме (примјер 1.3.) и формуле 2.1.2.

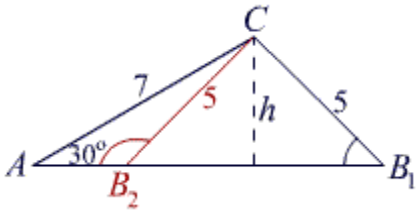
2.1.6. $P_\Delta = rs$, гдје је *r* полупречник уписане кружнице, а *s* је полуобим.



Доказ:
Троугао *ABC* (сл. лијево) раставља се на три троугла *ABO*, *BCO* и *CAO*, површина $\frac{1}{2}cr$, $\frac{1}{2}ar$ и $\frac{1}{2}br$, чији збир је rs.♦

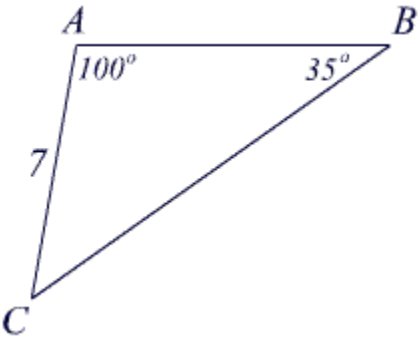
Примјер 2.1.7. Наћи површину троугла са елементима $a = 5$, $b = 7$, $\alpha = 30°$.

Рјешење: Постоје два троугла са тим елементима ΔAB_1C и ΔAB_2C, као на слици десно. У оба случаја, висина на страницу c је $h = b \cdot \sin\alpha = 7/2$. Са друге стране, из синусне теореме имамо $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$, тј. $\sin\beta = \frac{5}{7} \cdot \sin 30° = 0{,}7$. Отуда



$\beta_1 = 44{,}427°$ и $\beta_2 = 135{,}573°$. Збир углова у троуглу је 180°, па у првом, односно другом случају налазимо трећи угао $\gamma_1 = 105{,}573°$ и $\gamma_2 = 14{,}427°$. Опет, из синусне теореме $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma}$ налазимо $c_1 = AB_1 = 9{,}63289$ и $c_2 = 2{,}49146$. Коначно, површине првог, односно другог троугла су $P_1 = \frac{c_1 \cdot h}{2} = 16{,}85756$ и $P_2 = 4{,}36006$.

Примјер 2.1.8. Колика је површина троугла на слици?

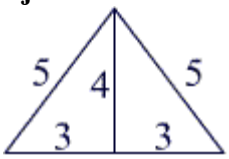


Рјешење: $\gamma = 180° - \alpha - \beta = 45°$.

Површина $P_\Delta = \frac{b^2 \cdot \sin\alpha \cdot \sin\gamma}{2\sin\beta} \approx 34{,}5$.

Примјер 2.1.9. Наћи површину троугла са страницама: **а)** 5, 5, 6; **б)** 5, 5, 8.

Рјешење: У оба случаја површина је 12, као што се види на сликама.

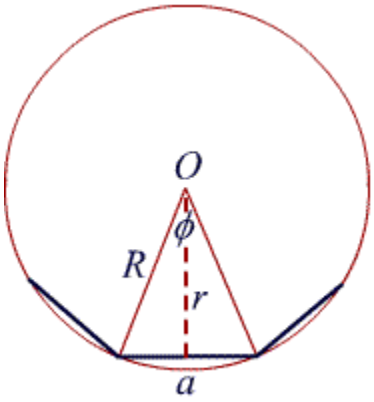


2.2. Правилни многоугао

Све странице правилног многоугла су у истој равни и једнаке су по дужини. То су једнакостранични троугао, квадрат, пентагон, правилни шестоугао, итд.

Примјер 2.2.1. Наћи површину правилног *n*-то угла (*n* = 3, 4, 5, …) странице *a*.

Рјешење: На слици десно, полупречници описане и уписане кружнице (апотема) правилног *n*-то угла су *R* и *r*. Централни угао под којим се види страница дужине *a* је $\phi = \frac{2\pi}{n}$.



Лако налазимо: $R = \frac{a}{2}\sin\frac{\pi}{n}$, $r = \frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}$.

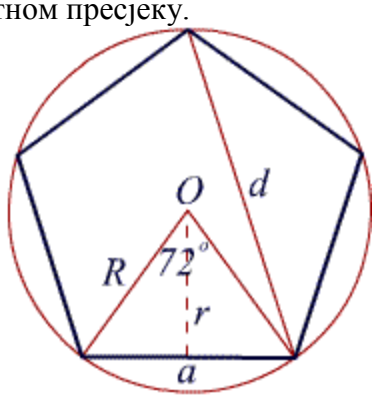
Површина *n*-то угла је $P_n = \frac{na^2}{4}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}$.

Посебно за једнакостранични троугао добијамо $P_3 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ и за квадрат $P_4 = a^2$.

Површина правилног шестоугаоника се може може раставити на шест једнаких једнакостраничних трогулова странице *a*, односно $P_6 = 6\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Примјер 2.2.2. Пентагон је често назив за правилни конвексни петоугаоник.
а) Израчунати углове између страница и дијагонала пентагона.
б) Изразити површину пентагона помоћу странице *a*.
в) Показати да су страница и дијагонала пентагона у златном пресјеку.

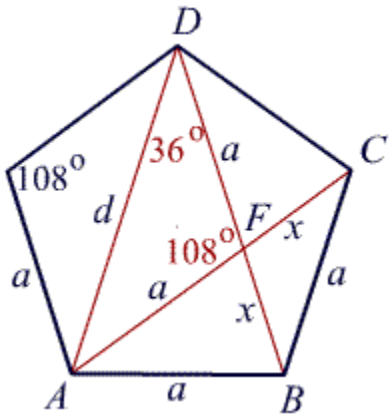
Рјешење: а) Централни угао под којим се види страница пентагона је 72°. Угао између сусједних дијагонала је 36°. Угао између сусједних страница је 108°.



б) Из претходног примјера $P_5 = \frac{5a^2}{4}\operatorname{ctg}36°$, односно

$P_5 = \frac{a^2}{4}\sqrt{25+10\sqrt{5}} \approx 1{,}72048\cdot a^2$.

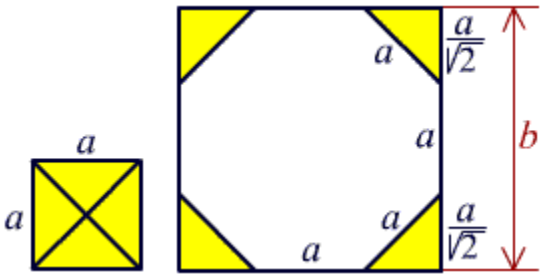
в) На сљедећој слици, дијагонале *d* су AD, AC и BD.
Имамо сличне троуглове: AFD и BCF.
Према томе је $d = a + x$, али и $d : a = a : x$, а ово је дефиниција **златног пресјека**.
Отуда квадратна једначина $d^2 - ad - a^2 = 0$, чија рјешења су $d_{12} = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\cdot a$. Прихватамо само позитивно рјешење, тј. $d : a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
Ово је тзв. **златни број** (≈ 1,61803).



Примјер 2.2.3. Изразити површину правилног осмоугаоника помоћу корјена.

Рјешење: На сљедећој слици се види да је површина правилног осмоугаоника странице a једнака разлици два квадрата: $P_8 = b^2 - a^2 = \left(\frac{a}{\sqrt{2}} + a + \frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2 - a^2$, тј.

$P_8 = 2a^2(1+\sqrt{2}) \approx 4{,}82843 \cdot a^2.$



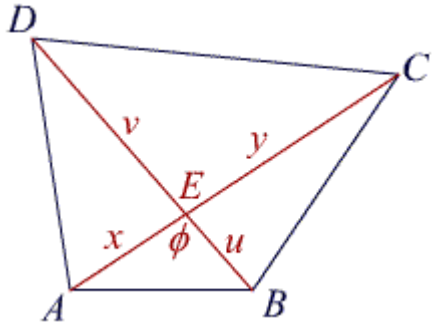
Како је (примјер 2.1.1.):

$P_8 = 2a^2 \operatorname{ctg}\frac{\pi}{8}$, то је

$\operatorname{ctg} 22{,}5° = 1+\sqrt{2}$.

2.3. Четвороугао

2.3.1. Површина произвољног равног четвороугла чије су дијагонале d_1 и d_2 је $P_4 = \frac{d_1 \cdot d_2}{2} \cdot \sin\phi$, гдје је ϕ угао између дијагонала.



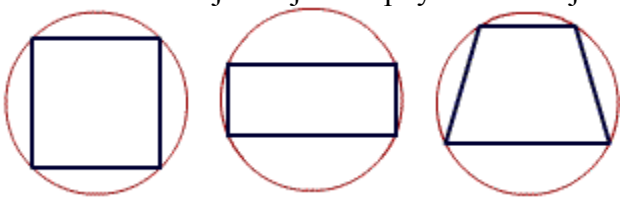
Доказ: На слици десно имамо дијагонале $AC = x + y$ и $BD = u + v$ које граде угао ϕ.

Површина четвороугла *ABCD* се може раставити на четири троугла *ABE*, *BCE*, *CDE* и *DAE*. Према томе $P_4 = \frac{xu}{2}\sin\phi + \frac{uy}{2}\sin(\pi-\phi) + \frac{yv}{2}\sin\phi + \frac{vx}{2}\sin(\pi-\phi)$, дакле

$P_4 = \frac{1}{2}(xu+uy+yv+vx)\sin\phi = \frac{1}{2}\big(u(x+y)+v(y+x)\big)\sin\phi = \frac{1}{2}(x+y)(u+v)\sin\phi$, а то је оно што смо требали доказати. ♦

2.3.2. Трапез је четвороугао који има један пар паралелних страна. Паралелне стране називамо основице трапеза, а удаљеност између њих висином трапеза. Полузбир основица називамо средња линија трапеза.

2.3.3. Тетивни је онај четвороугао око којег се може описати кружница.

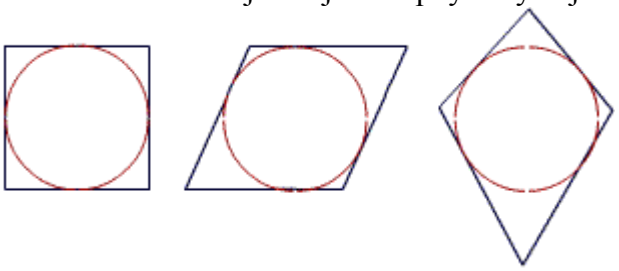


Збирови наспрамних углова тетивног четвороугла су једнаки, по 180°.

Тетивни четвороуглови су на примјер квадрат, правоугаоник, једнакокраки трапез.

2.3.4. Делтоид је четвороугао са два пара једнаких и сусједних страна.

2.3.5. Тангентни је онај четвороугао у који се може уписати кружница.



Збирови наспрамних страница тангентног четвороугла су једнаки.

Тангентни четвороуглови су квадрат, ромб, или делтоид.

Задаци 2.3.6.

1. Доказати наведене особине тетивног и тангентног четвороугла.

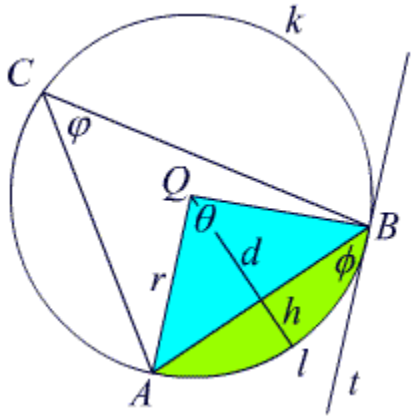
2. Нека су основице трапеза *a, b* и нека је висина *h*, показати да је површина трапеза дата формулом $P = \frac{a+b}{2} \cdot h$.

3. Ако су стране делтоида *a, b* доказати да је површина делтоида $P = ab\sin\angle ab$.

3. Круг

Кружница је геометријско мјесто тачака у равни једнако удаљених од једне фиксне тачке. Круницу називамо и периферија круга, удаљеност називамо полупречник, а фиксну тачку центром круга.

На слици десно је круг са елементима:
k – кружница са тачкама *ABC* (периферија круга);
r – полупречник (*AQ*);
AB – тетива;
t – тангента;
θ – централни угао ($\angle AQB$);
φ – периферни угао ($\angle ACB$);
ϕ – угао између тетиве и тангенте ($\angle ABt$);
l – кружни лук (*AlB*);
AQBl – (шрафирано) кружни исјечак;
ABl – (шрафирано) кружни одсјечак;



Такође, на истој слици можемо видјети да је полупречник круга једнак дубини кружног исјечка, тј. $r = d + h$, гдје је *h* висина одсјечка.

3.1. Површина

Обим круга је

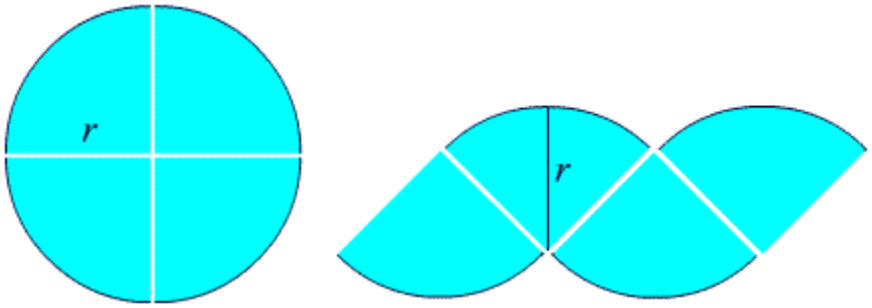
$$s = 2r\pi .$$

Површина круга је дата формулом

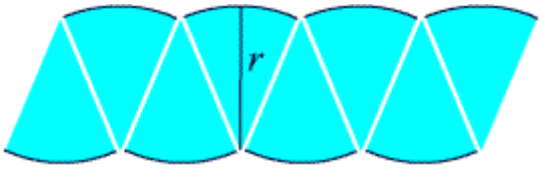
$$P = r^2\pi ,$$

гдје је *r* полупречник круга, а ирационалан број $\pi = 3.14159...$. Како ту формулу доказати? Погледајмо како је можемо разумјети помоћу обима круга ($2r\pi$).

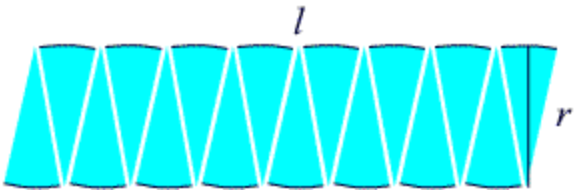
Примјер 3.1.1. Подјелимо круг у четвртине и сложимо их у „правоугаоник“:



Није баш тачан правоугаоник? Подјелимо исти круг у осмине, па пресложимо:



или у шеснеастине:



Када наставимо са овим подјелама даље и даље, сложена фигура све више постаје правоугаоник површине $P = l \cdot r$, гдје r полупречник круга. У крајњем, граничном случају l постаје полуобим круга $l = r \cdot \pi$, па је површина круга $P = r^2 \pi$. ♦

Дужина лука кружног исјечка је

$$l = r\theta,$$

гдје је θ централни угао у радијанима. Површина кружног исјечка је

$$P_I = \frac{1}{2} r^2 \theta,$$

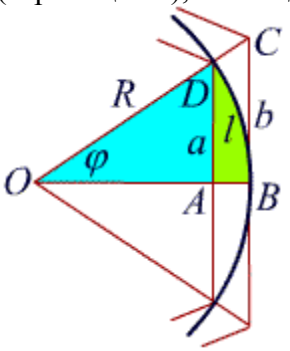
а површину кружног одсјечка израчунавамо по формули

$$P_O = P_I - P_\Delta = \frac{1}{2} r^2 \theta - \frac{1}{2} r^2 \sin\theta,$$

гдје је P_Δ површина тругла ABQ у кружном одсјечку на првој слици; угао θ је у радијанима.

Примјер 3.1.2. Докажимо да је обим круга $2R\pi$ помоћу уписаних и описаних n-то угаоника.

Рјешење: Нека је $n \in \{3,4,5,...\}$. Површина P_a уписаног n-то угаоника (странице $2a$) мања је од површине круга P_l а ова од површине P_b описаног n-то угаоника (странице $2b$), на сљедећој слици.



То можемо рећи и овако:

$$a < l < b,$$

гдје су $a = R \cdot \sin\varphi$, $b = R \cdot \operatorname{tg}\varphi$, затим R је полупречник круга, $\varphi = \frac{\pi}{n}$ је пола централног угла под којим се види страница n-то угаоника. Исти поредак остаје и када је n веома велики број. Дакле,

$$R \cdot \sin\varphi < l < R \cdot \operatorname{tg}\varphi,$$

односно $1 < \frac{l}{R \cdot \sin\varphi} < \frac{1}{\cos\varphi}$. За све веће бројеве n биће угао $\varphi = \frac{\pi}{n}$ све тачније нула, биће $\cos\varphi = 1$. Како се ради увијек о истом кругу, то мора бити $l = R \cdot \sin\varphi$.

На јединичној кружници, за $R = 1$ дужина лука једнака је централном углу у радијанима, па је за углове блиске нули $\sin\varphi = \varphi$. Овдје, $\sin\frac{\pi}{n} = \frac{\pi}{n}$.

Обим датог круга је $2l \cdot n = 2Rn \cdot \sin\frac{\pi}{n} = 2Rn \cdot \frac{\pi}{n} = 2R\pi$. ♦

Примјер 3.1.3. Око Земље опасан је појас. Затим је тај појас продужен за 1 метар. Може ли се испод појаса провући мачка?

Рјешење: Дужина опасаног појаса је $l = 2r\pi$, гдје је r полупречник Земље. Продужени појас биће дужине $L = 2R\pi$, гдје је R продужени полупречник. Како је $L = l + 1$, то је $2R\pi = 2r\pi + 1$, тј. $R - r = \frac{1}{2\pi} \approx 16$ cm, а то је сасвим довољно да би се испод провукла мачка.

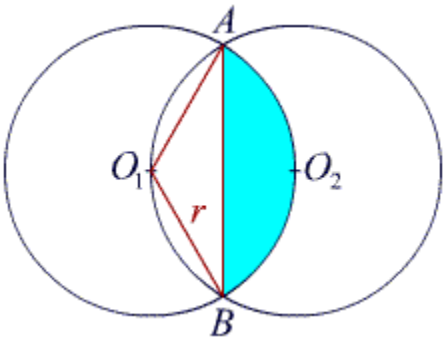
Примјер 3.1.4. Око троугла са страницама 13, 14 и 15 центиметара описан је круг. Израчунати површину оног дијела круга који је изван троугла.

Рјешење: Према Хероновом образцу, површина троугла је $P_\Delta = 84\,\text{cm}^2$.

Полупречник описаног круга је $R = \frac{abc}{4P_\Delta} = \frac{65}{8} = 8{,}125$. Површина описаног круга је $P_o = R^2\pi \approx 207{,}39$; површина изван троугла $P = P_o - P_\Delta \approx 123{,}39\ \text{cm}^2$.

Примјер 3.1.5. Растојање између центара два круга је a. Центар једног круга је на периферији другог и обрнуто. Колика им је заједничка површина.

Рјешење: Кругови су једнаких полупречника и $r = a$. На сљедећој слици, центри кругова су O_1 и O_2 а пресјечне тачке кружница су A и B. Троуглови O_1O_2A и O_1O_2B су једнакостранични. Према томе $\angle AO_1B = 120° = \frac{2\pi}{3}$ радијана.

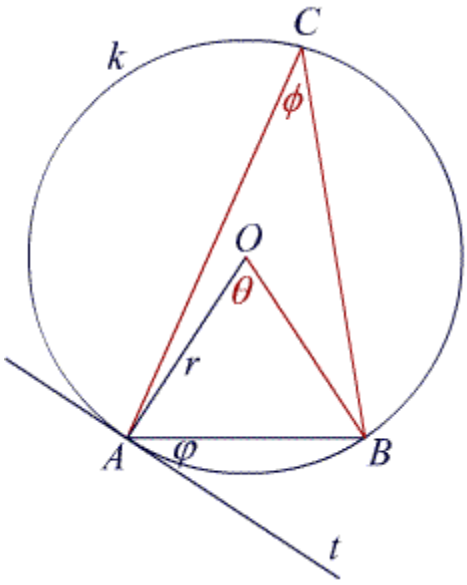


Површина исјечка AO_1B је $P_I = \frac{1}{2}a^2\frac{2\pi}{3}$, површина троугла AO_1B је $P_\Delta = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, а површина одсјечка BO_2A је $P_o = P_I - P_\Delta$ $= a^2\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) \approx 0{,}61418\ a^2$. Тражена површина је $2P_o \approx 1{,}22837\ a^2$.♦

Задатак 3.1.6. Три кружнице се сјеку тако да свака од њих пролази кроз центре остале двије. Растојање између центара је a. Наћи заједничку површину три круга.

3.2. Тетива

Тетива круга је дуж (AB) која спаја двије тачке на кружници (k).



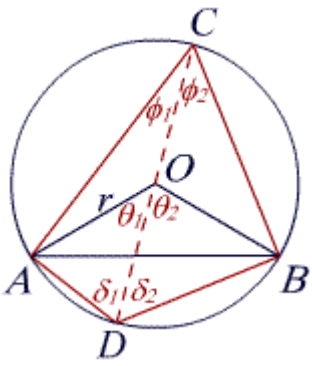
Тангента круга је права (t) која додирује кружницу (k), као на слици лијево.

Полупречник круга је дуж (r) која спаја центар круга (O) са тачком на кружници (A). Тангента и полупречник у истој тачки су узајамно окомити.

Периферни угао ($\angle AOC = \phi$) једнак је половини **централног** ($\angle AOB = \theta$) над истом тетивом (AC) и једнак је углу између те тетиве и тангенте у истој тачки ($\angle ABt = \varphi$). Периферни углови са супротних страна исте тангенте су суплементни, њихов збир је испружени угао (180°).

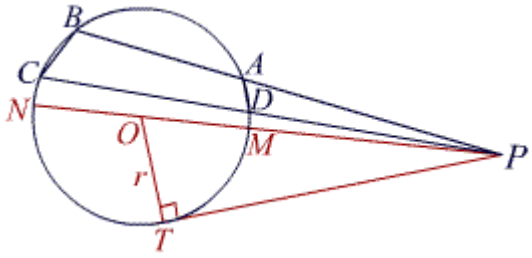
Примјер 3.2.1. Доказати:

а) Периферни угао једнак је половини централног над истом тетивом;
б) Периферни угао над пречником је прав;
в) Периферни углови над истом тетивом једнаки су или су суплементни;
г) Угао између тетиве и тангенте у истој тачки једнак је периферном углу над истом тетивом.



Доказ: а) На слици десно, троуглови *AOB*, *BOC* и *COA* су једнакокраки. Вањски угао ΔCOA једнак је збиру два унутрашња њему не сусједна угла, тј. $\theta_1 = 2\cdot\phi_2$. На исти начин видимо $\theta_1 = 2\cdot\phi_2$, затим $\theta = 2\cdot\phi$. **б)** Периферни угао над пречником је половина централног од 180°. **в)** За исти централни угао, над истом тетивом имамо једнаке периферне углове. Угао $\delta = \delta_1 + \delta_2$ са друге стране тетиве разлаже се на оштре углове два правоугла троугла ΔACD и ΔBCD који су комплементни са одговарајућим периферним. **г)** Посматрајте периферни угао чији крак иде кроз центар круга, окомито на тангенту. Углови са окомитим крацима су једнаки или су суплементни.

Примјер 3.2.2. Ако праве повучене из исте тачке сјеку дату кружницу, производи растојања од дате тачке до пресјека праве са кружницом су константни.



Доказ: Троуглови *PAD* и *PBC* на слици десно, слични су (*BD* тетива па $\angle A + \angle C = 180° \Rightarrow \angle BAD + \angle DAP = 180°$) и према томе $PA\cdot PB = PC\cdot PD$. ♦

Задатак 3.2.3. На претходној слици показати да је константни производ $p = PA\cdot PB$ једнак са $p = OP^2 - r^2$.

Потенција тачке *P* у односу на круг полупречника *r* са центром *O* је број $OP^2 - r^2$.

4. Фигуре (задаци)

Непразан скуп тачака у простору назива се **фигура**.

Двије праве (два правца) које имају двије заједничке тачке, имају и све тачке заједничке. За такве праве кажемо да се **поклапају**. Права која са равни (равнином) има двије заједничке тачке, има с њом и све тачке заједничке. За такву праву кажемо да **лежи у равни**. Три тачке су **колинеарне**, ако леже на истој правој. Права која лежи у равни, дјели раван у двије **полуравни** (полуравнине). Двије **равни се поклапају** ако имају три заједничке неколинеарне тачке.

Двије **праве су паралелне**, ако се поклапају, или ако леже у истој равни а немају заједничких тачака. Права и раван су паралелни ако немају заједничких тачака. Када двије равни немају заједничких тачака кажемо да су **паралелне.**

Двије праве се **мимоилазе**, ако не леже у истој равни и немају заједничких тачака. Двије **праве се сјеку**, ако имају само једну заједничку тачку. Права **продире** кроз раван (пробада равнину) ако са равни има само једну заједничку тачку. Двије равни могу имати (само једну) заједничку праву. Тада кажемо да се равни сјеку, а заједничка права је **линија пресјека** (пресјечница).

Права која продире кроз раван, а није на њу нормална (окомита), зове се **коса права**. Тачка у којој нормала продире кроз раван зове се **подножје** нормале. Подножје нормале, спуштене из тачке на раван, назива се **ортогонална** (нормална) пројекција , или само **пројекција** те тачке на ту раван. Дужина нормале повучене од неке тачке у простору до равни је **удаљеност** (одстојање) те тачке од равни.

4.1. Положаји фигура

1. Колико је равнина одређено са:
а) три; **б**) четири; **в**) 50; **г**) 100;
праваца које пролазе кроз исту тачку ако никоје три од тих правих не леже у истој равни (нису **компланарне**)?

2. У колико праваца се сјеку:
а) три; **б**) четири; **в**) 50; **г**) 100;
равнина простора које све имају једну заједничку тачку, а никоје три од њих не садрже исту праву?

3. Ако се редом споје четири некомпланарне тачке добија се **витопери**, просторни четвороугао. Доказати да спајањем средина његових страница настаје паралелограм.

4. Задате су три мимоилазне (мимосмјерне) праве. Одредити четврту праву која пресјеца те три праве. Колико рјешења има задатак?

5. Одредити у простору једнакостраничан троугао (трокут) који има један врх (тјеме) у заданој тачки A, а једну страницу на заданој правој p.

6. Тачке A и B леже ван праве p. На тој правој одредити тачку C тако да $AC + BC$ буде минимално.

4.2. Паралелност

1. Доказати да из двије дате паралелности слиједи трећа:

I. Ако су двије праве a и b паралелне са трећом c, доказати да су и међусобно паралелне, тј. $a\|c \wedge b\|c \Rightarrow a\|b$.

II. Ако су праве a и b међусобно паралелне, а једна од њих је паралелна са равни σ, доказати да је и друга паралелна са том равни, тј. $a\|b \wedge a\|\sigma \Rightarrow b\|\sigma$.

III. Доказати да двије равни α и β које су паралелне са трећом χ морају бити и међусобно паралелне, тј. $\alpha\|\chi \wedge \beta\|\chi \Rightarrow \alpha\|\beta$.

IV. Ако су двије равни α и β које имају једну заједничку тачку T, паралелне са правом p, онда је и њихова пресјечна линија t паралелна са датом правом, тј. $\alpha \| p \wedge \beta \| p \wedge T \in t \subset \alpha \cap \beta \Rightarrow t \| p$.

2. Када се двије паралелне равни пресјеку трећом, онда су њихови пресјеци паралелни. Доказати!

3. Три непаралелне равни, од којих је свака паралелна са датом правом, а нема са том правом заједничке тачке, сјеку се у три паралелне праве. Доказати!

4. Двије праве које се сјеку, а паралелне су са датом равни, одређују раван која је паралелна са датом. Доказати!

5. Ако су двије праве мимоилазне, тада се кроз прву може положити само једна раван паралелна другој правој. Доказати!

6. Конструкцијом:

I. Кроз тачку T ван праве p у простору повући праву t паралелну са p.
II. Кроз тачку A изван равни π положити раван $\sigma \| \pi$.
III. Кроз дату праву поставити раван која је паралелна са другом датом правом.
IV. Кроз дату тачку положити раван која је паралелна са двије задате мимоилазне праве.

4.3. Нормалност

1. Доказати:

I. Ако је раван нормална на једну од паралелних правих, нормална је и на другу.
II. Формирати (и доказати) теорему обрнуту претходној (1.I.).

2. Ако је права нормална на раван, онда је и свака раван која садржи дату праву нормална на дату раван. Доказати!

3. Доказати да се кроз дату праву, која није нормална на дату раван, може положити само једна раван нормална на дату раван.

4. Ако су три праве, које пролазе кроз исту тачку простора, узајамно нормалне, онда је и свака од њих нормална на раван коју образују преостале двије. Доказати.!

5. Конструисати из дате тачке на дату раван нормалу на ту раван.

6. Кроз дату тачку која лежи на датој правој конструисати раван нормалну на дату праву.

4.4. Ортогоналне пројекције

1. Доказати да је пројекција праве на раван права.

2. Дужине два сегмента, чије крајње тачке леже у паралелним равнима, су 12 и 13 центиметара, а њихове пројекције на једну од тих равни се односе као 5 : 9. Колика је удаљеност између тих равни?

3. Задата је дуж AB својом пројекцијом $A'B'$ тако да тачка A има коту +1, а кота тачке B је +4. Конструисати и одредити праву величину дужи AB.

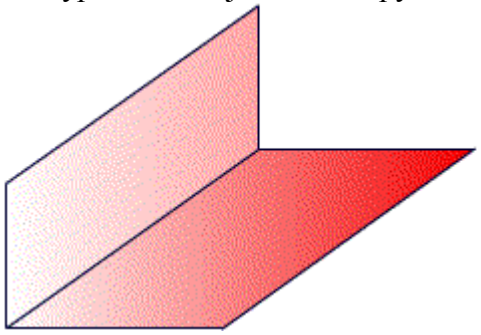
4. Задана је дуж AB својом пројекцијом $A'B'$ [A'(+2), B'(-3)]. Конструисати и одредити праву величину дужи AB.

5. Конструисати троугао ABC у правој величини, ако је задан својом пројекцијом $A'B'C'$ и котама AA' = 1 cm, BB' = 2 cm, CC' = 3 cm.

6. Паралелограм $ABCD$ је задан својом пројекцијом $A'B'C'D'$ и котама AA' = 1 cm, BB' = 2 cm, CC' = 3 cm. Конструисати и одредити коту тачке D.

5. Рогаљ

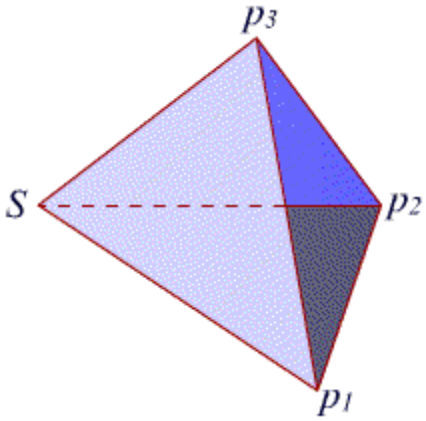
Диједарска површ је унија двије некомпланарне полуравни са заједничким рубом. Пресјеком двије равни настају четири диједарске површи, од којих свака садржи пресјечну праву равни и двије полуравни које нису у истој равни.



Диједарски угао је угао између двије равни.

Диједар је унија диједарске површи и свих тачака које се налазе са исте стране те површи.

Рогаљска површ настаје пресјеком три или више равни са једном заједничком тачком. Прецизније, када имамо $n \in \{3, 4, 5, \ldots\}$ међусобно различитих полуправих $p_1, p_2, p_3, \ldots$ са заједничким почетком S и када имамо узастопне углове p_1Sp_2 , p_2Sp_3 , p_3Sp_4 , … , тада је унија свих ових углова ***n*-тострана рогаљска површ**.

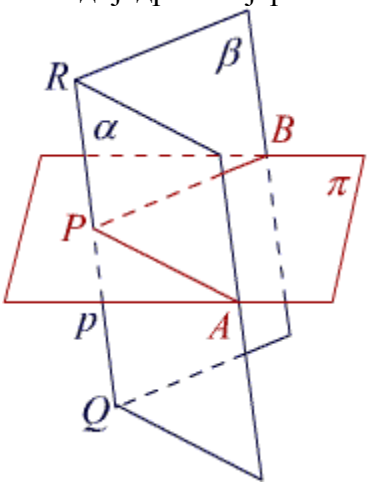


Рогаљ је унија n-тостране рогаљске површи и њене унутрашње, или њене спољашње области. Посебно, разликујемо врх, ивице и ивичне углове (или стране) рогља. Тростран рогаљ називамо триедар.

Триједар настаје када се пресјеку три равни са тачно једном заједничком тачком. Тада настаје осам триједара, сваки је унија свих тачака са исте стране датих равни, заједно са граничним тачкама датих равни које називамо триједарска површ.

5.1. Диједар

Угао диједра се мјери помоћу величине угла у равни. На слици доле лијево, видимо равни α и β које се сијеку дуж праве p, тј. RQ формирајући диједар. Права p је ивица диједра, а полуравни $p\alpha$ и $p\beta$ су стране диједра. Угао $\alpha p\beta$ је угао диједра.

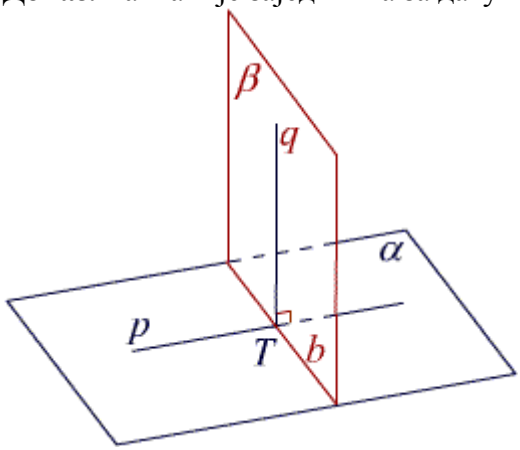


Раван π је окомита на обе стране диједра, а PA и PB су полуправе пресјека π са α и β редом. Угао диједра је величине $\angle APB$.

Када пресјецамо дати диједар произвољним равнима π_k ($k \in \mathfrak{R}$), и добијамо одговарајуће пресјечне углове, најмањи могући $\angle A_kP_kB_k$ је управо поменути $\angle APB$, тј. онај угао који се добија пресјеком диједра са окомитом равни.

Примјер 5.1.1. Ако раван (β) садржи праву (q) окомиту на другу раван (α), онда су те двије равни узајамно окомите ($\alpha \perp \beta$).

Доказ. Тачка T је заједничка за дату праву $q \perp \alpha$ и раван β. Како је свака тачка праве q у равни β, то је и тачка T у равни β. Дакле, тачка T је у пресјеку двеју равни, тј. $T \in b$, $b = \alpha \cap \beta$.



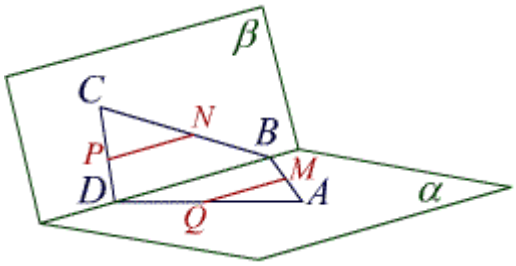
У равни α повуцимо праву p кроз тачку T окомито на пресјек двеју равни, на праву b. Раван π која садржи окомите праве p и q сјече диједар $\alpha b\beta$ под правим углом. Отуда је угао диједра $\angle pTq = 90°$.

Према томе, двије равни α и β су узајамно окомите.♦

Паралелограм је четвороугао са два пара паралелних страна. Такође, то је четвороугао са једним паром паралелних страна једнаких дужина.

Примјер 5.1.2. Показати да су средине страница четвороугла тјемена паралелограма.

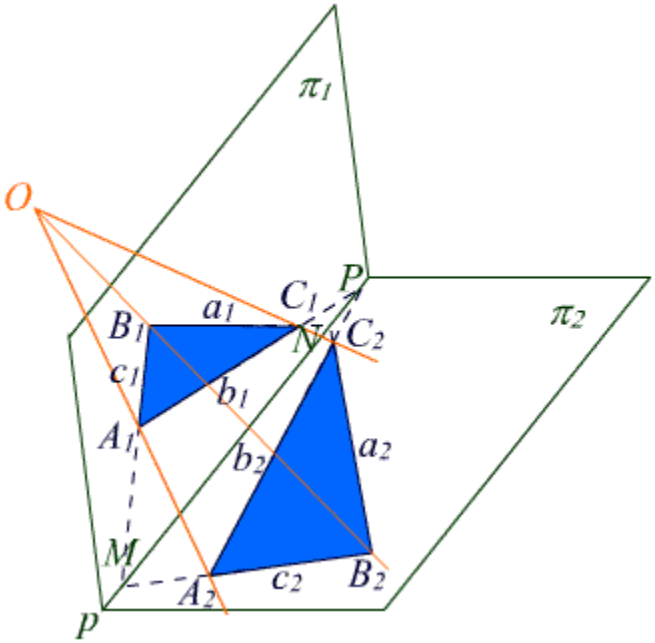
Рјешење: На слици десно, средине страница *MNPQ* четвороугла *ABCD* дефинишу средње линије *MQ* и *PN* троуглова *ABD* и *BCD*.
Према томе, дужи *MQ* и *PN* су паралелне и једнаке, што значи да је четвороугао *MNPQ* паралелограм.



Двије фигуре, два скупа тачака у једној или у двије равни, имају **центар перспективе** ако и само ако праве које пролазе кроз њихове одговарајуће тачке имају једну заједничку тачку.

Двије фигуре имају **осу перспективе** ако и само ако се њихове одговарајуће праве сјеку дуж једне праве.

Дезаргов став 5.1.3. Ако два троугла који припадају различитим равнима π_1 и π_2 имају центар перспективе (O) они имају осу перспективе (p) и обрнуто.



Доказ: На слици лијево, из тачке O полазе праве A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2, а доказаћемо да су тачке M, N и P пресјеци продужетака одговарајућих страница, тј. c_1c_2, a_1a_2 и b_1b_2, на правој $p = \pi_1 \cap \pi_2$.

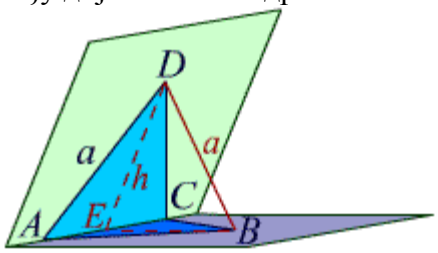
Праве OA_1A_2 и OB_1B_2 одређују раван којој припада тачка M, која се налази на пресјеку продужетка одговарајућих страница (c_1c_2). То значи да је тачка M пресјек равни π_1 (равни троугла $A_1B_1C_1$), π_2 (равни троугла $A_2B_2C_2$) и равни $OA_1A_2B_1B_2$. Аналогно, добијамо да су тачке N и P на пресјеку равнина π_1 и π_2, тј. на правој p.
Обрнуто, докажимо: ако тачке M, N и P које су пресјеци продужетака одговарајућих страница датих троуглова припадају истој правој p, онда праве које спајају одговарајућа тјемена тих троуглова пролазе кроз исту тачку O.

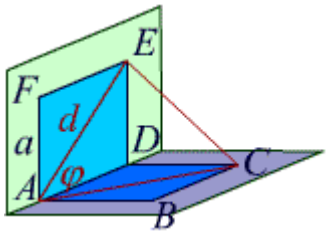
Тачке M, N и P су на пресјечној правој равнина у којима леже дати троуглови. Три равни AB (скраћено од $A_1A_2B_1B_2$), BC и CA имају заједничку тачку O, кроз коју пролазе пресјечне праве A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2.♦

Примјер 5.1.4. Углови.
а) Два једнакостранична троугла ABC и CDA странице a припадају двјема полуравнима диједарске површи. Ако је $BD = a$, колики је диједарски угао?

б) Два квадрата *ABCD* и *ADEF* припадају двјема полуравнима диједарске површи. Ако је диједарски угао 90°, колики је угао $\angle CAE$ између дијагонала квадрата?

Рјешење: а) На слици десно, висина *DE* једнакостраничног троугла *ACD* странице *a* је $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, па косинусна теорема за једнакокраки троугао *BDE* даје $a^2 = h^2 + h^2 - 2h^2 \cos\angle BED$, тј.



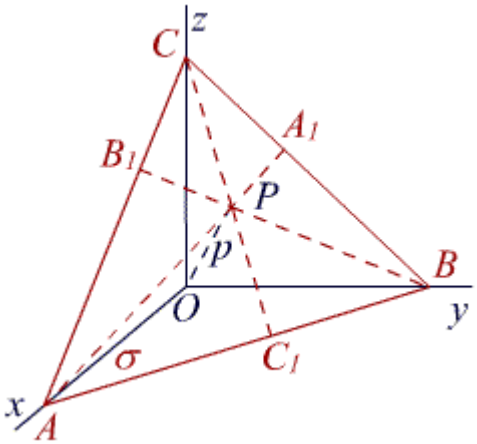


$\cos\angle BED = \frac{1}{3}$, односно приближно $\angle BED = 70{,}53°$. То је тражени диједарски угао. **б)** На слици лијево, дијагонала квадрата странице *a* је $d = a\sqrt{2}$. То је дужина *AE*, *AC* и *CE*. Троугао *ACE* је једнакостраничан, па је тражени угао $\varphi = \angle CAE = 60°$.

5.2. Триједар

Висина троугла је дуж која из врха троугла иде окомито на његову супротну страницу. Све три висине трогула сјеку се у једној тачки. **Ортоцентар** троугла је тачка, пресјек његових висина.

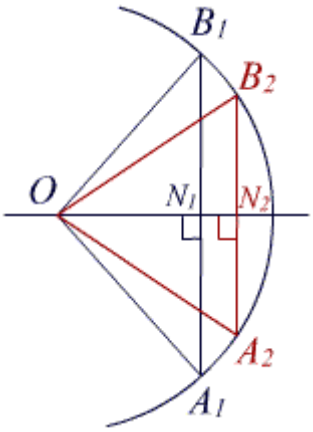
Примјер 5.2.1. Пресјек равнине и триједра чији су сви ивични углови прави је троугао чији ортоцентар је тачка у коју се пројектује врх триједра!



Доказ: На слици десно, троугао *ABC* је пресјек равнине σ и триједра *Oxyz* чији су сви ивични углови прави. Права *p* кроз *O* нормална је на σ у тачки *P*. Права *p* са полуправама редом *Ox*, *Oy*, *Oz* дефинише равни α, β, γ и пресјечне тачке A_1, B_1, C_1 са страницама троугла. Како α садржи праву *p* нормалну на раван σ и праву *Ox* нормалну на раван угла *Oxyz*, то је α нормална и на праву *BC*. То значи да је AA_1 висина троугла. Слично, BB_1 и CC_1 су висине, односно *P* је ортоцентар. ♦

Ивицама, ивичним угловима и диједарским угловима триједра аналогно одговарају тјемена, странице и углови троугла. Даље, за триједре важе правила подударности

аналогна правилима подударности троуглова: „ссс“, „сус“, „усу“, и умјесто правила „ссу“ које важи за подударност троуглова, сада важи правило „ако су диједри једног триједра подударни, редом, диједрима другог, тада су та два триједра подударна“.



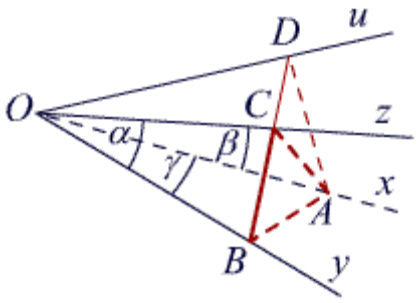
Став 5.2.2. Од два једнакокрака троугла, једнаких крака, већи угао између кракова има онај са већом основицом.

Доказ је очигледан, са слике десно: $\angle A_1OB_1 > \angle A_1OB_1$.

Прецизније, $\sin \angle N_1OB_1 = \frac{B_1N_1}{OB_1} > \frac{B_2N_2}{OB_2} = \sin \angle N_2OB_2$ па је $\angle N_1OB_1 > \angle N_2OB_2$, тј. $\angle A_1OB_1 > \angle A_1OB_1$.♦

Став 5.2.3. У сваком триједру је збир било која два ивична угла већи од трећег.

Доказ: Ивични углови триједра *Oxyz* на слици десно, су *yOz*, *xOz* и *xOy* означени редом α, β и γ. Доказаћемо да $\alpha + \beta > \gamma$. Ако је збир лијево већи од 180°, онда је неједнакост тачна јер је угао γ мањи од испруженог. Иначе, нека је *Ou* полуправа у равни угла α таква да је $\angle zOu = \beta$. Тачке *A*, *B*, *C* и *D* на полуправама *x*, *y*, *z* и *u* су такве да је *OA* = *OB* = *OD*, а због подударности „сус“ ($\Delta COD \cong \Delta COA$)

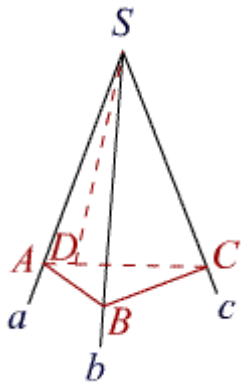


такође је *OD* = *OA*. Неједнакост троугла *ABC*, тј. *BC* + *CA* > *AB* даје *BD* = *BC* + *CD* > *AB*. Троуглови *OBD* и *OAB* су једнакокраки, једнаких крака, али је основица првог већа. Према претходном ставу (4.2.2.) биће $\angle BOD > \angle BOA$, па $\alpha + \beta > \gamma$.♦

За вјежбу, покушајте исти став исказати и доказати на још неки начин, или бар покушајте разумјети и сљедећи доказ.

Став (5.2.3.) Произвољан ивични угао триедра мањи је од збира његових осталих ивичних углова.

Доказ. У триедру, на сљедећој слици *Sabc*, угао *aSc* је највећи од ивичних



углова страна. Повуцимо полуправу SD унутар те стране, тако да је $\angle cSD = \angle cSb$. На полуправој SB је тачка B таква да је $SB = SD$. Триедар пресјецимо произвољном равни која садржи тачке B и D и не садржи S. Тачка C је пресјек те равни са полуправом Sc, ивицом триедра.

Одсјечци DC и BC су једнаки ($\Delta BCS \cong \Delta CDS$). У троуглу ABC имамо $|AC| < |AB| + |BC|$, тј. $|AD| + |DC| < |AB| + |BC|$. Отуда $|AD| < |AB|$ те $\angle ASD < \angle ASB$. Додајући $\angle DSC$ обема странама посљедње неједнакости добијамо да наведени став важи за триедар.♦

5.3. Рогаљ

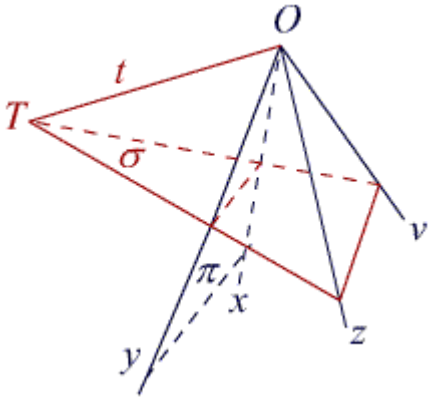
Сљедеће двије врсте рогаљских површи се подразумјевају у разматрањима.
Проста рогаљска површ је она код које се свака два несусједна ивична угла сјеку у само једној тачки, врху рогаљске површи.
Једнострана рогаљска површ је она за коју постоји раван кроз врх, таква да су све остале тачке површи са исте њене стране. За сваку једнострану рогаљску површ постоји раван која сјече све њене ивице по многоугаоној линији и не садржи њен врх. Отуда:

Став 5.3.1. Ивични углови једнострано раширене рогаљске површи мањи су од испруженог угла.

Тачка T ван рогаљске површи са врхом O је у њеној **унутрашњој области** ако полуправа OT сјече раван која сјече њене ивице по многоугаоној линији. Све остале тачке су у њеној **спољашњој области**. Под рогљем подразумјевамо онај који садржи унутрашњу област рогаљске површи.

Конвексан (испупчен) рогаљ је онај чије су сваке двије тачке крајеви дужи која му потпуно припада.

Примјер 5.3.2. Показати да за сваки конвексан четворострани рогаљ постоји триједар чији збир ивичних углова је већи.

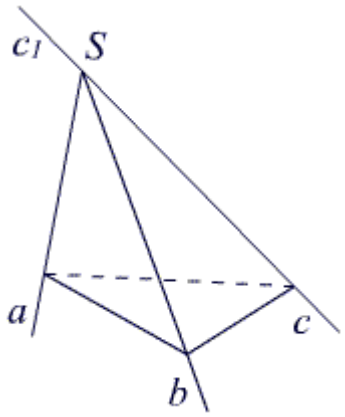


Рјешење: На слици десно је конвексан четворострани рогаљ $Oxyzv$ са ивичним углом, рецимо xOy. Њему сусједни ивични углови yOz и vOx имају заједничку тачку O. Њихове равни се сјеку по правој t која је изван равни π угла xOy. На слици, раван σ садржи тачку $T \in t$ и сјече ивице рогља. Триједар $OTzv$ обухвата дати рогаљ. У триједру $Otyx$ имамо (теорем 4.2.3.) $\angle aOt + \angle tOy > \angle xOy$. Додајући на обе стране неједнакости $\angle yOz + \angle zOv + \angle vOx$, и због

$\angle vOx + \angle xOt = \angle vOt$, $\angle tOy + \angle yOz = \angle tOz$ добијамо неједнакост $\angle vOt + \angle tOz + \angle zOv > \angle xOy + \angle yOz + \angle zOv + \angle vOx$, коју је и требало доказати.♦

Став 5.3.3. Збир ивичних углова било ког конвексног рогља је мањи од 360°.

Доказ: За конвексни рогаљ са $n > 3$ стране на начин из претходног примјера (4.3.2.) доказујемо да постоји $n - 1$ страни рогаљ са већим збиром ивичних углова. Затим наставимо даље аналогно, све до триедра. Постоји триједар чији је збир ивичних углова већи од збира датог рогља! Нека је то триједар на сљедећој слици.



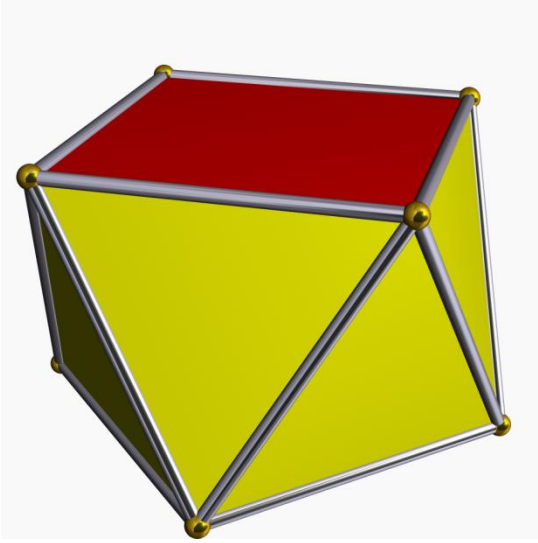
На слици лијево је триједар $Sabc$ и полуправа c_1 која полази из S и допуњује полуправу Sc. За ивичне углове триједра $Sabc_1$ је (теорем 4.2.3.) $\angle aSb < \angle aSc_1 + \angle bSc_1$. Додајмо објема странама $\angle bSc + \angle aSc$, затим саберимо углове који се допуњују до испруженог угла, па је збир на десној страни једнак два испружена, тј. $\angle aSb + \angle bSc + \angle aSc < 360°$, што је и требало доказати.♦

Правилан рогаљ има све ивичне углове једнаке и све диједре међусобно подударне.

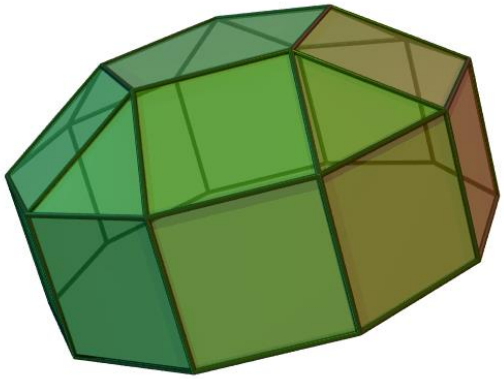
II Полиедри

Полиедар (грчки: *πολυς* – много; *εδρον* – база, површ) је геометријско тијело омеђено са најмање четири површи које називамо и **стране** полиедра. Границе површи, дужи, називамо **ивицама** полиедра. Крајње тачке ивица називамо **тјемена** полиедра. Ево неколико необичних примјера полиедара.

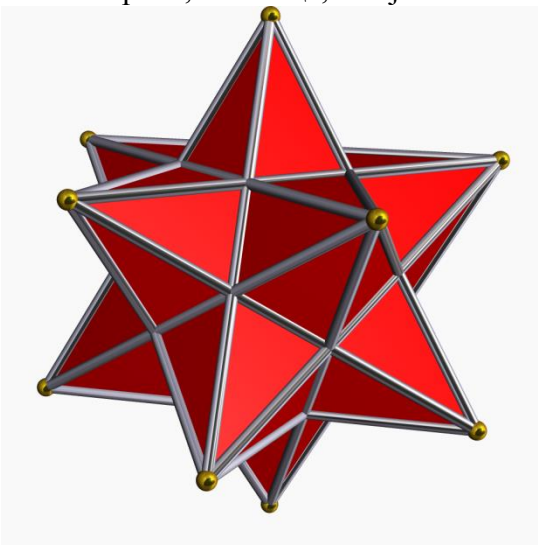
Квадратна антипризма:
10 страна, 16 ивица, 8 тјемена.



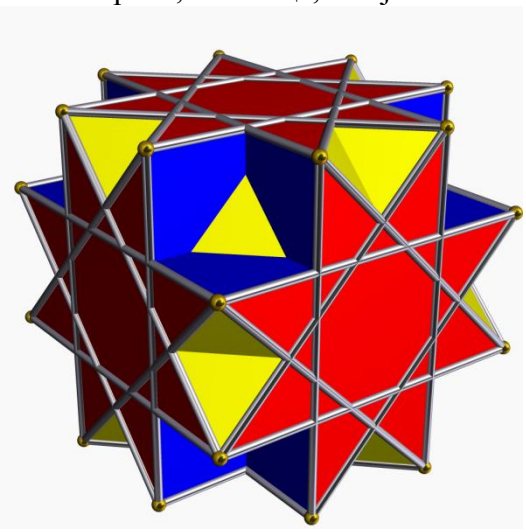
Издужена пентагонална купола:
22 страна, 45 ивица, 25 тјемена.



Мали звјездасти додекахедрон:
12 страна, 30 ивица, 12 тјемена.



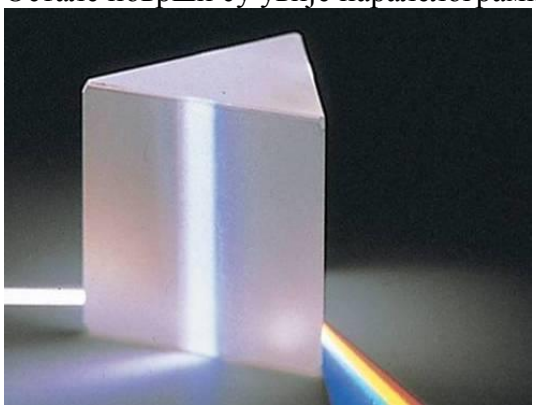
Велики кубикубоктахедрон:
20 страна, 48 ивица, 24 тјемена.



Прва два полиедра на претходним сликама (www.wikipedia.org) су **конвексни** (испупчени), а доња два су **конкавни** (са удубљењима). Ми ћемо даље разматрати само једноставне конвексне полиедре: **призму, пирамиду, зарубљену пирамиду** и **правилне полиедре**.

6. Призма

Призма је геометријско тијело са двије паралелне стране које називамо базе. Остале површи су увије паралелограми. Другим ријечима:



Призма је полиедар омеђен са двије базе и омотачем.

Базе су подударни многоуглови, а **омотач** се састоји од паралелограма.

На слици лијево је **тространа** призма која прелама свијетлост. Базе су јој два подударна једнакостранична троугла, а у омотачу има три подударна квадрата.

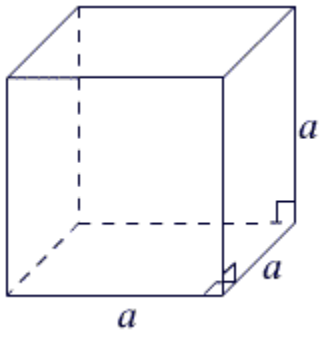
Призму углавном називамо према облику њене базе. Посебно имамо три четворостране призме: паралелопипед, квадар и коцку, тијела које су нам познате из основне школе.

Паралелопипед је призма чија основа је паралелограм.

Квадар је права (усправна) призма чија основа је правоугаоник. Димензије квадра називамо **дужина**, **ширина** и **висина**, на слици доле *a*, *b* и *c*.

Коцка је квадар чије су све три димензије једнаке.

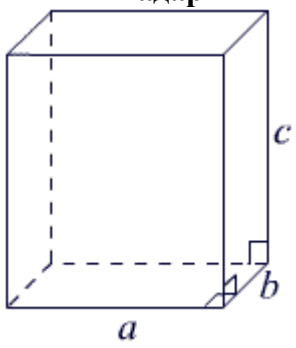
Коцка



$P = 6a^2$

$V = a^3$

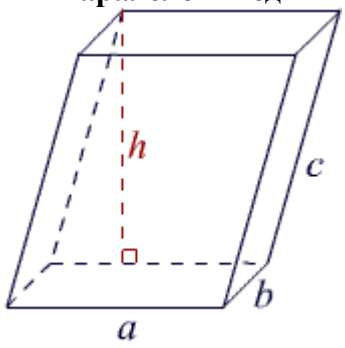
Квадар



$P = 2ab + 2bc + 2ac$

$V = abc$

Паралелопипед



$P = 2B + M$

$V = Bh$

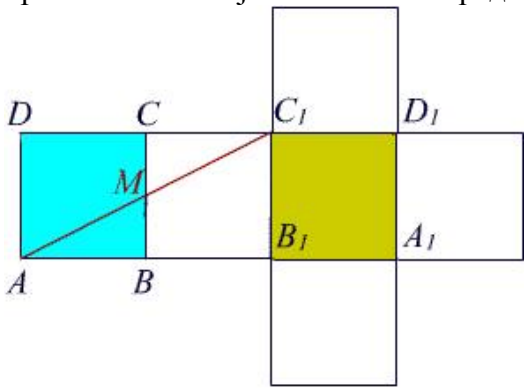
Површина призме једнака је збиру површина њених двију база (два подударна *n*-тоугла) и омотача (*n* паралелограма).

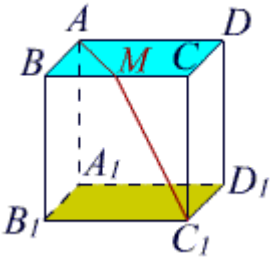
Запремина призме једнака је производу њене базе и висине.

6.1. Дужине и углови

Примјер 6.1.1. (Мрав на коцки) Мрав се налази на једном тјемену коцке. Одредити најкраћи пут којим мрав може да стигне до супротног тјемена коцке (на другом крају главне дијагонале).

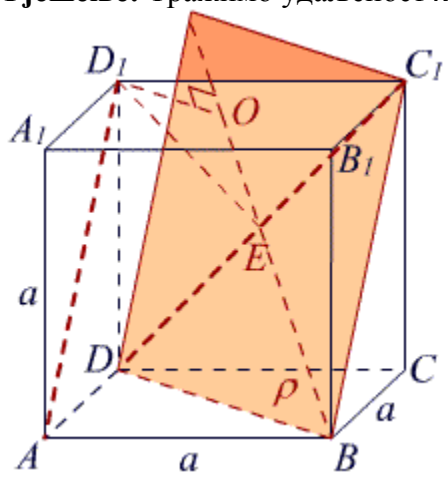
Рјешење: На мрежи коцке видимо да је најкраћи пут од тјемена A до тјемена C_1 преко тачке M која се налази на средини ивице BC.





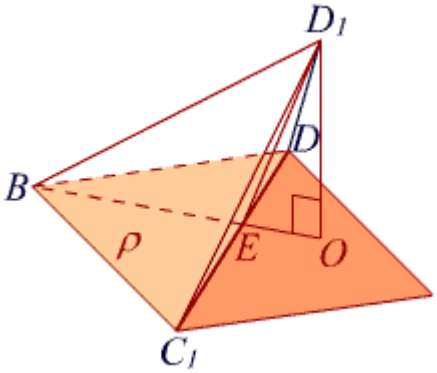
Примјер 6.1.2. Наћи удаљеност између мимоилазних дијагонала сусједних страна коцке ивице a.

Рјешење: Тражимо удаљеност x између дијагонала AD_1 и DC_1, на слици доле лијево. То је дужина најкраћег пута између њих. Односно, то је удаљеност између линије AD_1 до равнине ρ њој паралелне, а у којој лежи друга дијагонала (DC_1). Због $AD_1 \parallel BC_1$ имамо $AD_1 \parallel BC_1D$, па је тражена удаљеност x једнака растојању између, рецимо тачке D_1 и поменуте равни ρ (тј. BC_1D).



Дуж D_1O је окомита на раван ρ. Пресјек дужи OB и дијагонале DC_1 је тачка E. При томе, тачка E је средина бочне дијагонале DC_1, а све странице троугла BC_1D су бочне дијагонале дужине $a\sqrt{2}$. Главна дијагонала коцке BD_1 је дужине $a\sqrt{3}$.

На слици десно је дио исте коцке. Троугао BD_1E има странице $\overline{BE} = a\frac{\sqrt{6}}{2}$, $\overline{D_1E} = a\frac{\sqrt{2}}{2}$ и $\overline{D_1B} = a\sqrt{3}$. Примјетимо да је квадрат посљедње наведене странице већи од збира квадрата прве двије, што значи да је троугао D_1BE тупоугли, са тупим углом у тјемену E. Даље, према косинусној теореми имамо

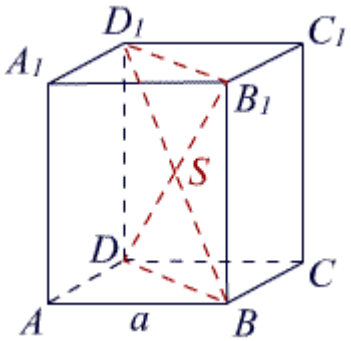


$$\cos\angle D_1BE = \frac{\overline{D_1B}^2 + \overline{BE}^2 - \overline{ED_1}^2}{2\cdot\overline{D_1B}\cdot\overline{BE}}$$

$$= \frac{3a^2 + \frac{3a^2}{2} - \frac{a^2}{2}}{2 \cdot a\sqrt{3} \cdot a\frac{\sqrt{6}}{2}} = \frac{4}{3\sqrt{2}}$$. Отуда, $x = \overline{OD_1} = \overline{D_1B} \cdot \sin \angle D_1BE = a\frac{\sqrt{3}}{3}$.♦

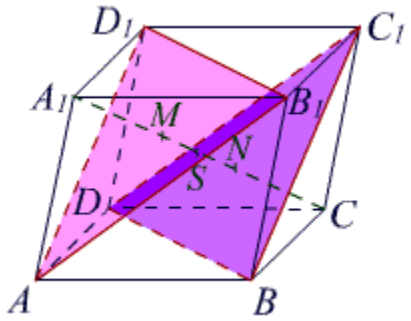
Примјер 6.1.3. Дијагонале DB_1 и BD_1 квадратног квадра $ABCDA_1B_1C_1D_1$ су узајамно нормалне. Израчунати угао између дијагонала AC_1 и BD_1.

Рјешење: На сљедећој слици, пресјек дијагонала DB_1 и BD_1 је тачка S. Како правоугаоник BB_1D_1D има окомите дијагонале, он је квадрат. Нека је ивица базе призме $AB = a$. Тада је дијагонала базног квадрата $BD = a\sqrt{2}$, па и $BB_1 = a\sqrt{2}$.



Даље је $DB_1 = BD_1 = 2a$. Како су све дијагонале дате призме подударне и садрже тачку S која их полови, то је $AC_1 = 2a$.
Отуда $SA = SB$, што значи да је троугао ASB једнакостраничан. Према томе $\angle ASB = 60°$, тј. тражени угао између дијагонала AC_1 и BD_1.♦

Примјер 6.1.4. Доказати да равни AB_1D_1 и BDC_1 дијеле дијагоналу A_1C паралелопипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ на три подударне дужи.



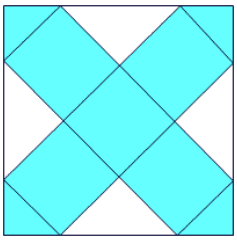
Доказ: На слици лијево, S је пресјек дијагонала датог паралелопепида, а тачке M и N су продори дијагонале A_1C кроз раван AB_1D_1 односно BDC_1. Ове равни су паралелне, а тачка S је центар симетрије паралелопипеда, па се троуглови AB_1D_1 и BDC_1 пресликавају један у други. Отуда $MS = SN$. Даље, из $A_1S = SC$ слиједи $A_1M = NC$. Међутим, тачка M је тежиште троугла AC_1A_1 па је $A_1M = \frac{2}{3} \cdot A_1S = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot A_1C = \frac{1}{3} \cdot A_1C$. Што значи да су дужи NC и MN такође трећине дијагонале A_1C. Према томе, сва три дијела дијагонале су подударна.♦

Задатак 6.1.5. Свака ивица правилне шестостране призме је a. Наћи дијагонале призме.

6.2. Површина призме

Када површину основе призме означимо са B, површину њеног омотача M и површину призме са P тада је $P = 2B + M$.

Примјер 5.2.1. (Математископ, Београд 2003.) Да ли се цигла која има облик коцке ивице 10 центиметара може умотати у папир за паковање облика квадрата странице 30 центиметара.



Рјешење: На слици десно доле је мрежа, дводимензионални модел коцке највеће странице.
Папир облика квадрата странице 30 цм, који даје највећу коцку странице $30\sqrt{2}/4 \approx 10{,}6$ центиметара. То значи да је могуће запаковати коцкасту циглу ивице 10 цм у квадратни папир странице 30 цм.♦

Задатак 6.2.2. (Грегоријевић, Обрадовић, Београд 1994.) Основе праве призме су ромбови са дијагоналама једнаким 8 и 6, а дијагонале бочних страна призме су једнаке 13. Одредимо површину призме.

Задатак 6.2.3. (Уџбеник, Кечкић, Београд 1992.) Нагибни угао диједра при једној бочној ивици косе тростране призме једнак је 120°. Растојања од те ивице до других бочних ивица призме износе 16 и 14. Одредити површину омотача призме, ако је дужина бочне ивице једнака 20.

Примјер 6.2.4. Површина омотача правилне четворостране призме износи 32, а површина призме је 40. Одредити висину призме.

Рјешење: Из $P = 2B + M$ имамо $B = \frac{1}{2}(P - M) = \frac{1}{2}(40 - 32) = 4$. Површина основе, квадрата је 4, па је ивица основе $a = 2$. Из $M = 4aH$, добијамо висину призме $H = \frac{M}{4a} = \frac{32}{8} = 4$.♦

Задатак 6.2.5. Дужине основних ивица праве тростране призме износе 13 цм, 14 цм и 15 цм, а дужина висине је 26 цм. Кроз једну бочну ивицу и ону висину основе која одговара најмањој страници постављена је раван. **а)** Одредити површину пресјека. **б)** Израчунати површину призме.

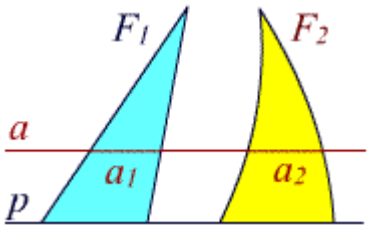
Задатак 6.2.6. Површина омотача правилне шестостране призме је 289, а дијагонала бочне стране је 17. Наћи основну ивицу и висину призме.

6.3. Кавальеријев принцип

Бонавентура Франческо Кавальери (1598 – 1647) је италијански математичар познат је по својим радовима из оптике и кретања. Међу првима је користио логаритме и претходио је открићу инфинитезималног рачуна. У свом раду (*Geometria indivisibilibus continuorum nova*) 1635. изашао је са идејом да се површина састоји од недјељивих линија, а запремина од недјељивих површина и употребио свој принцип за мјерење запремине тијела, претходно откривен од Кинеза (Цу Генгзи 480–525.). Убрзо је Џон Валис (*Arithmetica ifinitorum*, 1655)

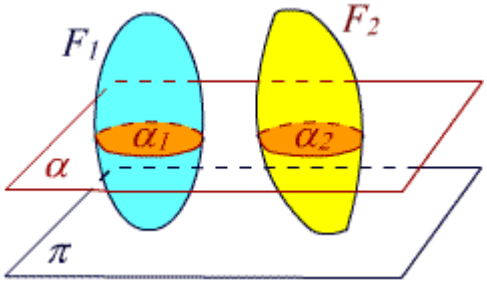
аритметизовао Кавањерове идеје, а двадесетак година касније Њутн и Лајбниц су их дефинитивно потврдили.

Кавањеријев принцип у равни: ако су пресјеци неке двије фигуре у равни и било којих правих које их сијеку, а паралелне су некој датој правој, једнаких дужина, тада су и површине датих фигура једнаке.



На слици десно, ако су одсјечци a_1 и a_2 , пресјека произвољне праве a паралелне датој правој p са датим фигурама F_1 и F_2 међусобно једнаки, онда су површине фигура једнаке.

Кавањеријев принцип за тијела гласи: ако су пресјеци нека два тијела и било које равни која их сијече, а паралелна је некој датој равни, фигуре једнаких површина, тада су запремине тих тијела једнаке.



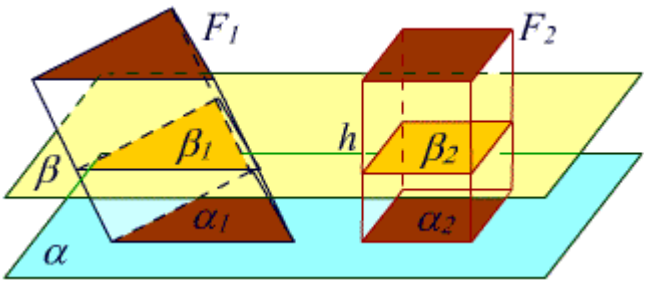
На слици десно, ако су површине α_1 и α_2 ,

пресјека произвољне равни α паралелне датој равни π са датим тијелима F_1 и F_2 међусобно једнаке, онда су запремине тијела једнаке.

На слци лијево (*wikipedia.org*) новчићи илуструју Кавањеријев принцип.

Примјер 6.3.1. Двије призме једнаке базне површине и једнаких висина имају једнаке запремине. Доказати формулу $V = B \cdot h$.

Упутство: На слици десно, двије призме једнаких висина h на равни α, коса тространа F_1 и правилна четворострана F_2, имају базе једнаких површина $\alpha_1 = \alpha_2$. Произвољна раван $\beta \parallel \alpha$ пресјеце те призме. Због



подударности троуглова α_1 и β_1 налазимо да су и површине пресјека једнаке, тј. $\beta_1 = \beta_2$. Даље, једнаке су запремине призми F_1 и F_2. Отуда за призме закључак да је **запремина = база · висина**.

6.4. Запремина

Примјер 5.4.1. (*mathforum.org*) Непознати број једнаких коцкица је састављен тако да формира већу коцку. Неколико страна велике коцке је офарбано и она је затим растављена. На 45 малих коцкица није уопште било боје. Колико страна велике коцке је офарбано?

Рјешење: Рецимо да је n дужина ивице велике коцке. Тада је дужина ивице највеће унутрашње коцке $n - 2$ и она садржи $(n - 2)^3$ малих коцкица. Како нити једна од унутрашњих коцкица није могла бити офарбана, то значи да их има највише 45, што значи да је $(n - 2)^3 \leq 45$. Отуда $n - 2 \leq 3$, тј. $n \leq 5$. Са друге стране, велика коцка има најмање 45 коцкица, што значи да је $n^3 \geq 45$, тј. $n \geq 4$. Према томе n је 4 или 5.

Претпоставимо прво да $n = 4$. Тада имамо $2^3 = 8$ унутрашњих коцкица и мора бити $45 - 8 = 37$ вањских неофарбаних. Број свих вањских коцкица је $4^3 - 2^3 = 56$. Како 37 од тих 56 није фарбано, преостаје $56 - 37 = 19$ фарбаних. Примјетимо да када бројимо фарбане коцкице не можемо просто додати број коцкица на страни, јер ако су офарбане двије сусједне стране, тада су ивичне коцкице фарбане два пута, а остале једном. Како свака страна садржи $4^2 = 16$ коцкица, требају бити фарбане најмање двије стране да бисмо имали 19 фарбаних коцкица. Прва страна даће 16 фарбаних коцкица и друга још 16, ако јој није сусједна, односно још 12 ако јесте сусједна. Нити у једном од та два случаја збир није 19, што значи да није $n = 4$.

Према томе, ако задатак има рјешење онда мора бити $n = 5$. Понављајући претходни рачун, сада добијамо редом: укупно коцкица има 125, унутрашњих је 27, вањских 98, вањских нефарбаних 18, вањских фарбаних 80. Како свака страна садржи 25 коцкица, а нама треба укупно 80 фарбаних, то значи да треба фарбати најмање 4 стране. Ако фарбамо 5 страна, тада је само једна страна нефарбана, па је на њој свега 9 неофарбаних коцкица, што је са унутрашњих 27 недовољно за збир 45. Ако фарбамо 4 стране, тада су двије стране нефарбане, али није свеједно да ли су то сусједне двије, или наспрамне. Када су то двије сусједне стране, онда на њима има 12 + 9 = 21 нефарбана коцкица, плус 27 унутрашних, а то је више од 45. Када су то двије супротне стране, онда на њима има 9 + 9 = 18 нефарбаних коцкица, плус 27 унутрашњих, а то је тачно 45.

Дакле, ивица велике коцке има 5 малих коцкица и офарбане су 4 стране велике коцке, а нису двије наспрамне. ♦

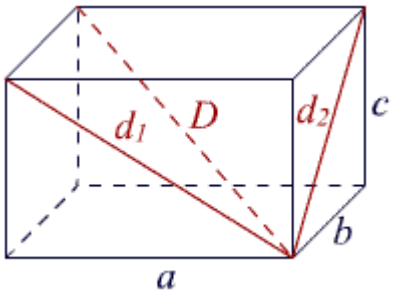
Примјер 6.4.2. Површина основе праве тростране призме је 4, а површине бочних страна су 9, 10 и 17. Наћи запремину призме.

Рјешење: Производи ивица базе и висине призме су 9, 10 и 17, па важи пропорција $a : b : c = 9 : 10 : 17$. Према томе $a = 9k$, $b = 10k$ и $c = 17k$, гдје је непознати коефицијент k реципрочна вриједност висине призме. Према Хероновом образцу $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = B$, $s = 18k$, па. $\sqrt{18k \cdot 9k \cdot 8k \cdot k} = 4$. Отуда $k = \frac{1}{9}$, па је висина призме је $H = 9$, а запремина $V = BH = 36$. ♦

Примјер 6.4.3. У правилној призми висина $H = 20$, а дијагонала бочне стране је $d = 21$. Наћи запремину призме ако је призма:
а) тространа; **б)** четворострана; **в)** шестострана.

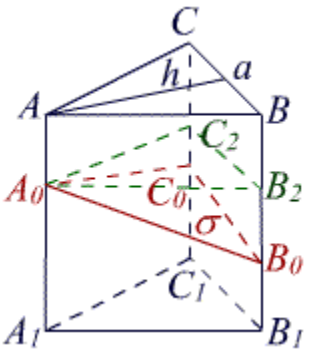
Резултати: а) $V_3 = \frac{41\cdot\sqrt{3}}{4}\cdot 20 \approx 355{,}07$; **б)** $41\cdot 20 = 820$; **в)** $\approx 2130{,}42$.

Примјер 6.4.4. Дијагонала квадра је $D = 14$, а дијагонале његових бочних страна су $d_1 = 4\sqrt{6}$ и $d_2 = 7\sqrt{3}$. Израчунати површину и запремину квадра.



Рјешење: Из $a^2+b^2+c^2=D^2$, $a^2+c^2=d_1^2$ и $b^2+c^2=d_2^2$ одузимањем слиједи $b^2=D^2-d_1^2$ и $a^2=D^2-d_2^2$, односно $b = 10$, $a = 7$, одакле и $c=\sqrt{47}$. Површина квадра је $2ab+2ac+2bc$ $=140+34\sqrt{47} \approx 373{,}09$. Запремина квадра је $V = abc = 70\sqrt{47} \approx 479{,}90$.♦

Примјер 6.4.5. Раван σ сјече ивице AA_1, BB_1 и CC_1 праве тростране призме $ABCA_1B_1C_1$ редом у тачкама A_0 , B_0 и C_0. Израчунати однос запремине дате призме и запремине тијела $ABCA_0B_0C_0$ ако је $AA_0 : AA_1 = p$, $BB_0 : BB_1 = q$ и $CC_0 : CC_1 = r$.



Рјешење: Нека су H, B и V редом висина, површина основе и запремина призме $ABCA_1B_1C_1$, док су a и h страница BC и одговарајућа висина троугла ABC. Ако раван паралелна основи, кроз тачку A_0 сјече ивице BB_1 и CC_1 у тачкама B_2 и C_2 онда је запремина тијела $ABCA_0B_0C_0$ једнака збиру запремина призме $ABCA_0B_2C_2$ и пирамиде $B_2B_0C_0C_2A_0$. Према томе,

$$V_1 = P_{ABC}\cdot AA_0 + \frac{1}{3}\cdot\frac{B_2B_0 + C_2C_0}{2}\cdot h$$

$$= P_{ABC}\cdot H\cdot p + \frac{1}{3}\cdot\frac{H\cdot(q-p)+H\cdot(r-p)}{2}\cdot a\cdot\frac{2P_{ABC}}{a}$$

$$= P_{ABC}\cdot H\cdot\frac{p+q+r}{3}, \text{ па је}$$

$$V : V_1 = 3 : (p+q+r).$$

Исти однос остаје и у случају произвољне тростране призме.♦

7. Пирамида

Када је дато више ($n = 3, 4, 5, \ldots$) међусобно различитих полуправих са заједничким почетком V (Vp_1 , Vp_2 , …, Vp_n) које формирају углове тако да су свака два сусједна угла у различитим равнима, тада унију свих ових углова називамо ***n*-то страном рогаљском површи**. Тачку V називамо **врхом**, полуправе **ивицама**, а

углове ивичним угловима или **странама** те рогљасте површи. Рогаљска површ са најмање страна је тространа или **триедарска површ.**

Проста рогаљска површ је она код које се сваке двије несусједне стране сјеку у само једној тачки – врху. **Једнострано раширена** рогаљска површ је она која може остати сва само са једне стране равни која пролази кроз њен врх. Овдје подразумјевамо да је рогаљска површ проста једнострано раширена.

Рогаљ је унија рогаљске површи и њене унутрашње, или њене спољашње области. Тространн рогаљ називамо **триједар.**

Ако раван сјече све ивице рогља, она разлаже тај рогаљ на двије фигуре. Ону од тих фигура која садржи врх рогља називамо **пирамида**. Дио дате равни унутар страна рогља називамо **база** пирамиде, а све остале површине **странама омотача** пирамиде. Врх рогља, врх рогаљске површи називамо **врхом пирамиде**. Тространu пирамиду називамо и **тетраедар.**

Права, или усправна пирамида је она код које је врх изнад тежишта базе, тачније она код које врх и тежиште базе дефинишу праву окомиту на базу.
Правилна пирамида је она која је права и чија база је правилан *n*-то угаоник.

База *n*-то стране пирамиде је *n*-то угаоник који дефинише име пирамиде. Тространa пирамида у бази има троугао, четворострана четвороугао, итд.

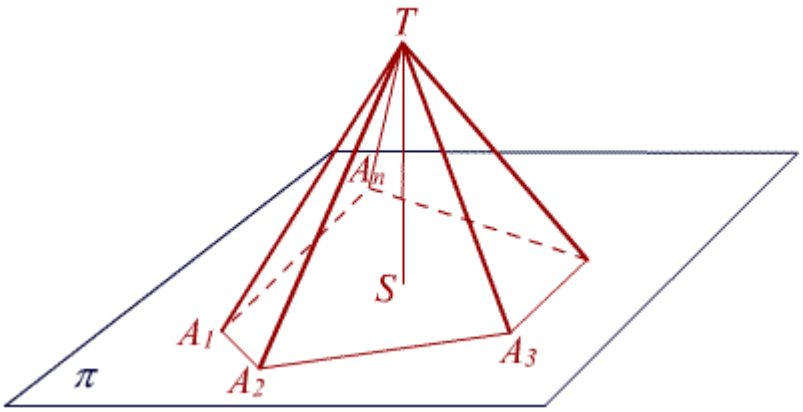
На слици лијево је Кеопсова пирамида код Гизе у Египту. То је правилна 4-страна пирамида у чијој бази је квадрат странице 225 метара, висине 137 метара (некада 147 м). Ивице су нагнуте према бази под углом 51°50'. Та највећа пирамида на свијету има запремину 2 583 283 метара кубних и тежину 6,25 милиона тона. Називају је још и Велика пирамида, или Куфу пирамида (Ахет Куфу - „Кеопсов хоризонт“).

7.1. Површине пирамиде

Примјер 7.1.1. Ако су све бочне ивице пирамиде једнаке, тада:

1. основа пирамиде је тетиван многоугао;
2. центар кружнице описане око основе је подножје висине пирамиде;
3. нагибни углови бочних ивица према равни основе међусобно су једнаки.

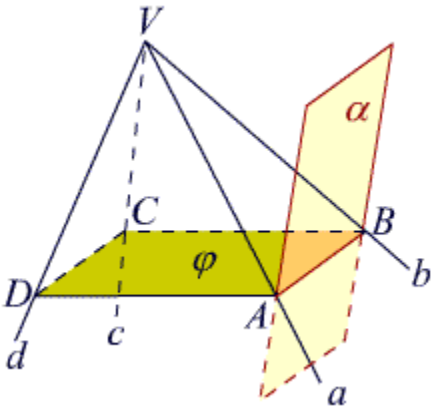
Доказ: Нека је T врх, многоугао A_1, A_2, A_3, ..., A_n основа дате пирамиде, а подножје висине S. Правоугли троуглови A_1ST, A_2ST, A_3ST, …, A_nST имају једнаке хипотенузе (бочне стране пирамиде) и



заједничку једну катету (висину пирамиде). Зато су сви ови троуглови подударни па је $A_1S = A_2S = A_3S = \ldots = A_nS$. Према томе, тачка S је средиште кружнице описане око основе, те је базни многоугао тетиван. Из исте подударности троуглова слиједи да су нагибни углови бочних ивица према равни основе међусобно једнаки. ♦

Примјер 7.1.2. Доказати да је сваки конвексни четвороструки рогаљ могуће пресјећи равнином тако да пресјек буде паралелограм. (Републичко такмичење БиХ, 1965.)

Рјешење. Раван φ сјече ивице четвороструког конвексног рогља $Vabcd$ по конвексном чевторуглу $ABCD$. Слика лијево. Како је бирати да тај четвороугао буде паралелограм?



Узмимо произвољну тачку A на једној ивици Va датог рогља. Поставимо раван α кроз тачку A паралелно страни Vdc рогља, па је $AB \parallel DC$. Аналогно, раван β кроз исту тачку A је паралелна страни Vbc, па је $AD \parallel BC$. Дакле, $ABCD$ је паралелограм. Даље, сви пресјеци рогља равнинама паралелним са φ су паралелограми.♦

Задаци 7.1.3.

1. Нека су основне ивице правилне тростране пирамиде једнаке 2, а висина пирамиде нека је $\sqrt{7}$. Кроз једну основну ивицу постављена је раван која сјече наспрамну бочну ивицу под правим углом. Наћи површину пресјека.

2. Основа пирамиде је једнакокраки троугао са страницама a, $2a$ и $2a$. Висина пирамиде пролази кроз тјеме угла наспрам странице a и једнака је H. Наћи површину омотача.

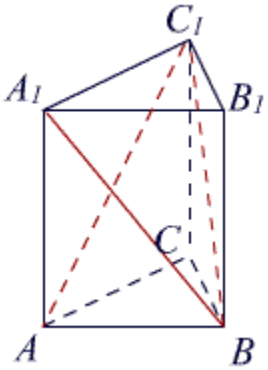
3. Основа пирамиде је квадрат странице 20, а њена висина дужине 21 пада у једно тјеме основе. Наћи површину омотача пирамиде.

4. Основа пирамиде је ромб дијагонала 10 и 24. Висина пирамиде дужине 5 пролази кроз пресјек дијагонала ромба. Наћи дужине апотема и површину пирамиде.

7.2. Запремина пирамиде

Теорем 7.2.1. Запремина пирамиде једнака је трећини запремине призме која са датом пирамидом има једнаку висину и базу једнаке површине.

Доказ. Уочимо тространу призму $ABCA_1B_1C_1$ на слици доле лијево. Свака од три бочне стране је паралелограм (или је правоугаоник), кога дијагонала дијели на два троугла једнаких површина.



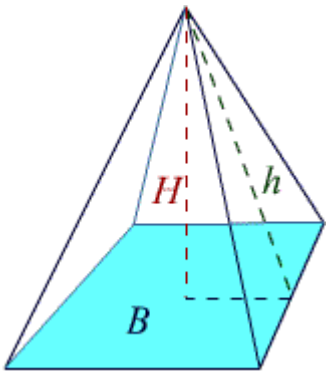
Изрежимо дату призму на три тростране пирамиде $ABCC_1$, AC_1A_1B и $BB_1C_1A_1$ и покажимо да су запремине добијених пирамида једнаке.

Прва има базу троугао ABC, али исту пирамиду такође можемо разумјети и као пирамиду са базом ACC_1. Тако схваћена прва од пирамида има базу једнаке површине са базом AC_1A_1 друге од наведених пирамида и са њом има једнаку висину. Према Кавањеровом принципу оне имају и једнаке запремине!

Прву од пирамида, такође можемо разумјети и као пирамиду са базом BC_1C и врхом A. Тако схваћена прва од пирамида има базу једнаке површине са базом BB_1C_1 треће од наведених пирамида и са њом има једнаку висину. Према Кавањеровом принципу и ове двије пирамиде имају једнаке запремине. Према томе, све три пирамиде имају једнаке запремине!

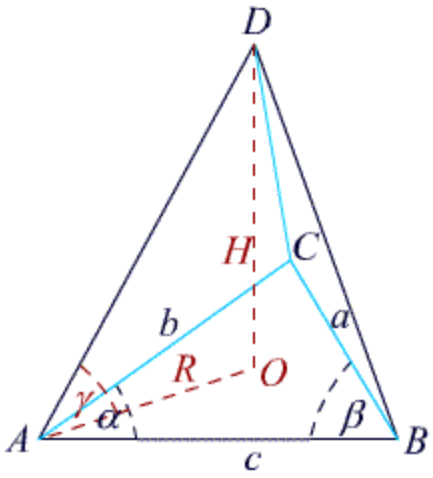
Са друге стране, за пирамиду произвољне базе постоји призма њој једнаке базе и висине. Такође, постоји и тространа призма њој једнаке површине базе и једнаке висине. Ову тространу призму изрежимо на дати начин на три једнаке пирамиде. Према Кавањеровом принципу, тада постоји резање почетне произвољне призме на три пирамиде једнаких запремина.♦

Запремина пирамиде је $V = \frac{1}{3}BH$, гдје је B површина многоугла у бази и H висина пирамиде. На слици десно, разликујемо висину пирамиде од апотеме h – висине бочне стране пирамиде, тј. висине бочног троугла.



Троугао који формирају висина пирамиде и апотема је правоугли, без обзира на врсту (базе) пирамиде, са катетом H и хипотенузом апотемом h.

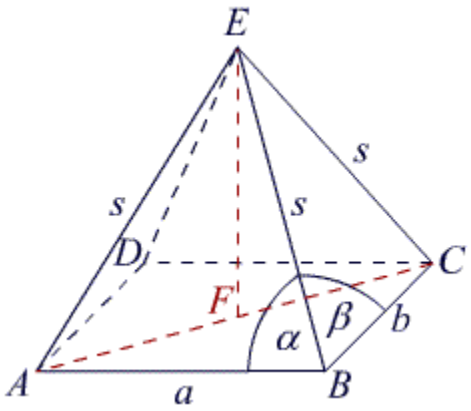
Примјер 7.2.2. Наћи запремину тростране пирамиде, датих углова α и β базног троугла, чији је полупречник описаног круга R. Све бочне ивице пирамиде нагнуте су према основи под углом γ.



Рјешење. Због једнаког угла γ нагиба ивица *AD*, *BD* и *CD* пирамиде према равни основе, пирамида је права и подножје њене висине *DO* је центар описаног круга базног троугла *ABC*.

Из правоуглог троугла *AOD* слиједи $H = R\cdot\mathrm{tg}\gamma$. Из базног троугла *ABC* и синусне теореме слиједи $a = 2R\sin\alpha$, $b = 2R\sin\beta$. Површина базе је $P_{ABC} = \frac{1}{2}ab\sin\angle(a,b)$ $= 2R^2\sin\alpha\sin\beta\sin(\alpha+\beta)$, па је запремина пирамиде $V = \frac{1}{3}P_{ABC}H = \frac{2}{3}R^3\sin\alpha\sin\beta\sin(\alpha+\beta)\,\mathrm{tg}\,\gamma$. ♦

Примјер 7.2.3. Основа пирамиде је правоугаоник, а све њене бочне ивице су дужине *s*. Бочне ивице заклапају углове α и β са ивицама основе. Израчунати запремину пирамиде.



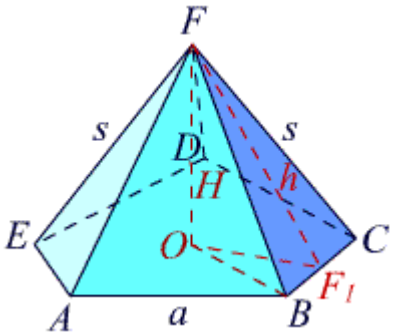
Рјешење. На слици лијево, основа пирамиде је правоугаоник *ABCD* страница *a* и *b*. Висина пирамиде је *EF*.

Из једнакокраких бочних троуглова *ABE* и *BCE* слиједи $a = 2s\cos\alpha$, $b = 2s\cos\beta$. Пола дијагонале правоугаоника је $AF = s\sqrt{\cos^2\alpha+\cos^2\beta}$, па је висина пирамиде $EF = s\sqrt{\sin^2\alpha-\cos^2\beta}$. Према томе, запремина пирамиде је $V = \frac{4}{3}s^3\cos\alpha\cos\beta\sqrt{\sin^2\alpha-\cos^2\beta}$. ♦

Примјер 7.2.4. Правилна петострана пирамида висине *H* има у бази петоугао странице *a*. Доказати:

1. Бочна ивица пирамиде је $s=\sqrt{H^2+\frac{5+\sqrt{5}}{10}\cdot a^2}$;

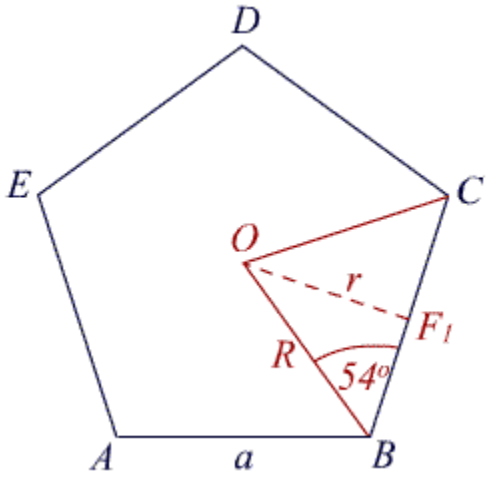
2. Апотема, тј. висина бочне стране је $h=\sqrt{H^2+\frac{5+2\sqrt{5}}{20}\cdot a^2}$;



3. Површина пирамиде је $P=\frac{5a\left(a+\sqrt{a^2+4\left(5-2\sqrt{5}\right)H^2}\right)}{4\sqrt{5-2\sqrt{5}}}$;

4. Запремина пирамиде је $V=\frac{1}{12}a^2H\sqrt{25+10\sqrt{5}}$.

Доказ: На слици доле лијево имамо базу *ABCDE* дате пирамиде, правилан петоугаоник странице *a*, са центром *O*, полупречницима описаног и уписаног круга, редом $R = OB$ и $r = F_1O$.

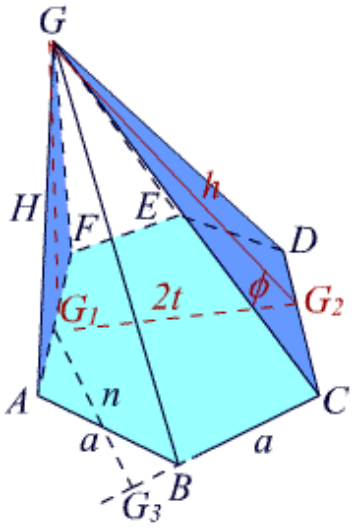


Катета $BF_1 = a/2$ правоуглог троугла BF_1O са хипотенузом *OB* заклапа угао 54°, па је $R=\frac{a}{2\cos 54°}$ и $r=\frac{a}{2}\operatorname{tg}54°$. Како је $\cos 54° = \sin 36° = \frac{\sqrt{2\left(5-\sqrt{5}\right)}}{4}$ и $\operatorname{tg}54° = \operatorname{ctg}36° = \frac{\sqrt{5\left(5+2\sqrt{5}\right)}}{5}$, то су $R=a\cdot\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}$ и $r=\frac{a}{2}\cdot\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}$, тј. $R\approx 0{,}85065\cdot a$ и $r\approx 0{,}68819\cdot a$.

Из троугла *OBF* на претходној слици десно налазимо, $s=\sqrt{H^2+R^2}$, те слиједи да је (1.) тачно. Из троугла F_1FO налазимо апотему $h=\sqrt{H^2+r^2}$, те је и (2.) тачно. Површина пирамиде се састоји из површине базе, а то је пет површина троуглова *BCO* плус омотач, који чине пет бочних троуглова *BCF*. Дакле, $P=5\cdot\frac{ar}{2}+5\cdot\frac{ah}{2}$ што замјенама *r* и *h* даје да је (3.) тачно. Коначно, запремина ове пирамиде је $V=\frac{1}{3}\left(5\cdot\frac{ar}{2}\right)H=\frac{1}{12}a^2H\sqrt{25+10\sqrt{5}}$.♦

Примјер 7.2.5. Правилни шестоугаоник странице a је база пирамиде. Једна страница пирамиде је окомита на базу, а њој супротна страница је нагнута према бази под углом ϕ. **а)** Наћи запремину пирамиде. **б)** Ако је $\phi = 60°$ наћи површину пирамиде.

Рјешење. На слици доле лијево, бочна страна ΔAFG дате пирамиде стоји усправно на раван основе, а њему супротна бочна страна, троугао CDG нагнут је под углом ϕ према равни основе. GG_1 је висина H пирамиде, GG_2 је апотема h супротне бочне стране, а основа пирамиде је једнакостраничан конвексан шестоугао ABCDEF странице a.



Правилан шестоугао основе састоји се од шест једнакостраничних троуглова странице a, висина (тежишница) $t = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

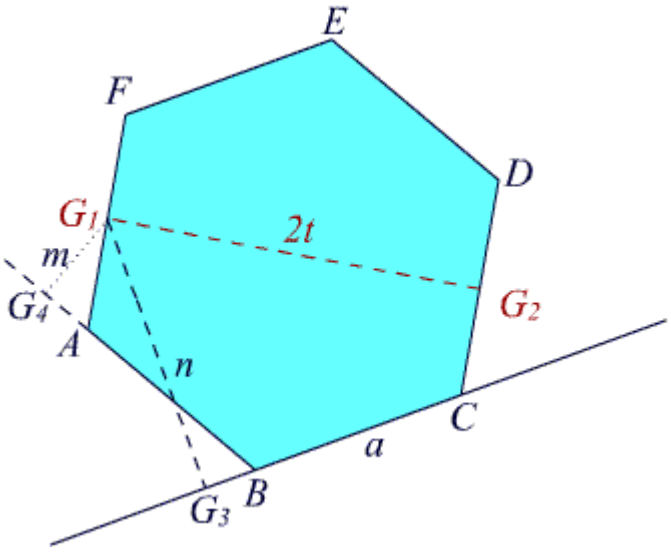
а) Троугао G_1G_2G је правоугли са правим углом у тјемену G_1 и хипотенузом h. Катета $G_1G_2 = a\sqrt{3}$.

Отуда, висина пирамиде $H = a\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,\phi$, па је запремина пирамиде $V = \dfrac{3}{2}a^3\,\mathrm{tg}\,\phi$.

б) За дати угао $\phi = 60°$, због $\mathrm{tg}\,60° = \sqrt{3}$ имамо $H = 3a$. Затим, апотема h супротне бочне стране је

$h = \dfrac{a\sqrt{3}}{\sin\phi}$, тј. $h = 2a$.

Нормала $n = G_1G_3$ на ивицу BC је један ипо пут дужоа од тежишнице t, тј. $n = \dfrac{3a\sqrt{3}}{4}$, на слици десно.



Отуда апотема бочног троугла BCG (и троугла DEG), због $h_1 = \sqrt{H^2 + n^2}$ износи $h_1 = \dfrac{3a}{4}\cdot\sqrt{19}$.

Аналогно, апотема бочне стране ABG (и EFG) из $m = \dfrac{1}{2}t = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$ и $h_2 = \sqrt{H^2 + m^2}$ износи $h_2 = \dfrac{7a\sqrt{3}}{4}$. Омотач пирамиде има површину једнаку збиру површина шест

бочних страна $M = \left(\frac{aH}{2} + \frac{ah}{2}\right) + 2 \cdot \frac{ah_1}{2} + 2 \cdot \frac{ah_2}{2}$. Површини пирамиде треба додати још и базу површине $B = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$, те је $P = \frac{a^2}{4}(10 + 19\sqrt{3} + 3\sqrt{19})$, односно $P \approx 14a^2$. ♦

Задаци 7.2.6.

1. Бочне стране тростране пирамиде су нормалне међу собом. Израчунати запремину пирамиде ако су површине бочних страна 4, 8 и 9 m^2.

[16 m^3]

2. Страна правилне тростране пирамиде је нагнута према равни основе под углом 45°, а удаљена је до тежишта основе *d*. Израчунати запремину пирамиде.

$[\frac{\sqrt{2}}{4}d^3]$

3. Бочне ивице тростране пирамиде имају дужине *a* и образују рогаљ са два угла од 60° и једним правим углом. Израчунати површину и запремину ове пирамиде.

$[a^2 + \frac{a^2\sqrt{3}}{2},\ \frac{a^3\sqrt{2}}{12}]$

4. Израчунати запремину правилне четворостране пирамиде ако је ивица основе 5 dm, а висина пирамиде износи 12/13 висине бочне стране.

[25 dm^2]

5. Наћи површину и запремину правилне четворостране пирамиде чија ивица основе је 2 cm, а ивица стране 3 cm.

$[4 + 8\sqrt{2}\ \text{cm}^2,\ \frac{4}{3}\sqrt{7}\ \text{cm}^3]$

6. Израчунати површину и запремину правилне шестостране пирамиде ако је бочна ивица 6 и нагнута је према равни основе под углом 60°.

7. Основа усправне пирамиде је ромб странице 3 и угла између сусједних страница 45°. Краћа бочна ивица пирамиде је 3. Израчунати површину и запремину пирамиде.

8. Основа пирамиде је правоугаоник. Бочне ивице пирамиде су дужине 5 и са ивицама основе заклапају углове 45° и 60°. Израчунати запремину пирамиде.

9. Основа правилне пирамиде је петоугао. Њене бочне ивице дужине *b* са висином пирамиде граде угао 30°. Израчунати запремину пирамиде.

8. Зарубљена пирамида

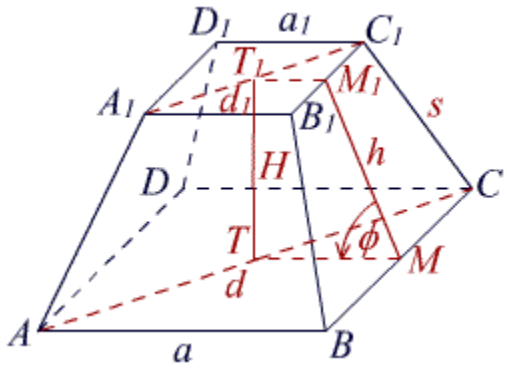
Када се пирамида пресјече са равни паралелној равни основе добије се *n*-то угао хомотетичан (сличан) са основом. Део пирамиде између тих хомотетичних површи је *n*-тострана **зарубљена пирамида**.

Хомотетични многоуглови (*n*-то углови) називају се **основе**, или **базе** зарубљене пирамиде, а околни трапези чине **омотач**. Растојање између основа је **висина** зарубљене пирамиде, а висине трапеза називају се **апотеме** зарубљене пирамиде.

Зарубљена пирамида је **права** ако је настала од праве пирамиде, а **правилна** ако је настала од правилне.

8.1. Ивице

Четворострана пирамида има 5 тјемена, 5 страна и 8 ивица. Када јој одрубимо врх, настане зарубљена четворострана пирамида са 8 тјемена (A, B, C, …, C_1, D_1 на слици лијево), 6 страна и 12 ивица.



Уопште, *n*-тострана пирамида (n = 3, 4, 5, …) има $n + 1$ тјемена, $n + 1$ страна и $2n$ ивица. Када јој одрубимо врх, настаће зарубљена *n*-тострана пирамида са $2n$ тјемена, $n + 2$ страна и $3n$ ивица.

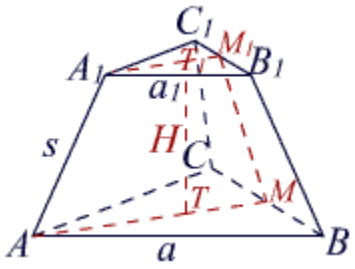
У сваком од наведених случајева важи тзв. Ојлерова формула, број

(тјемена) + (страна) = (ивица) + 2.

Примјер 8.1.1. Правилна четворострана зарубљена пирамида (претходна слика) има основе дужине a, a_1 и висину H. Израчунати дужине дијагонала d, d_1, бочне ивице s, апотеме h и угао ϕ нагиба бочне стране према равни (доње) основе.

Рјешење. Према Питагориној теореми $d = a\sqrt{2}$, $d_1 = a_1\sqrt{2}$. Из трапеза ACC_1A_1 налазимо $s = \sqrt{H^2 + \frac{1}{2}(d - d_1)^2}$. Помоћу трапеза BCC_1B_1 налазимо $h = \sqrt{H^2 + \frac{1}{4}(a - a_1)^2}$. Трапез MM_1T_1T даје $\operatorname{tg}\phi = \frac{2H}{a - a_1}$.♦

Примјер 8.1.2. Основне ивице правилне зарубљене тростране пирамиде износе a и a_1. Бочна ивица једнака је s. Наћи висину пирамиде.



Рјешење. На слици лијево, из трапеза BCC_1B_1 налазимо апотему $MM_1 = \sqrt{s^2 - \frac{1}{4}(a - a_1)^2}$.

Висина пирамиде H једнака је дужини T_1T удаљености између тежишта горњег и доњег базног троугла. Трапез TMM_1T_1 даје

$$H = \sqrt{s^2 - \frac{1}{3}(a - a_1)^2}\ .\blacklozenge$$

Примјер 8.1.3. Зарубљена пирамида има n ивица. Када јој одрубимо свако од тјемена, колико ће настали полиедар имати тјемена и ивица.

Рјешење. На крају сваке од постојећих ивица појавиће се по једно тјеме, те ће настали полиедар имати $2n$ тјемена. Из сваког од новонасталих тјемена полази по једна нова ивица, које додате на постојеће дају укупно $3n$ ивица насталог полиедра.

8.2. Површина зарубљене пирамиде

Примјер 8.2.1. Наћи површину правилне четворостране зарубљене пирамиде ако су основне ивице 30 и 6, а висина пирамиде је 5.

Рјешење. Површину чине двије базе и омотач, тј. $P = B + B_1 + M$. Омотач се састоји од четири једнакокрака трапеза. Према ознакама из примјера 7.1.1. биће

$$P = a^2 + a_1^2 + 4 \cdot \frac{a + a_1}{2} \cdot h = 900 + 36 + 72 \cdot h = 936 + 72 \cdot 13 = 1872.\blacklozenge$$

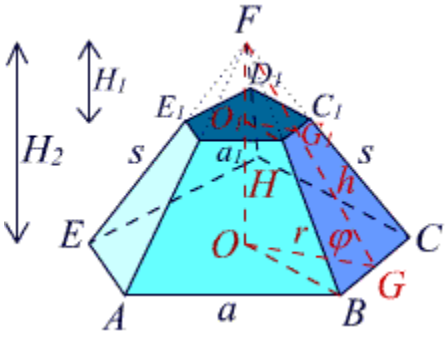
Примјер 8.2.2. Наћи површину правилне тростране зарубљене пирамиде ако су основне ивице 8 и 2, а бочна ивица пирамиде је 5.

Рјешење. Површину чине двије базе и омотач, овдје два једнакостранична троугла и три једнакокрака трапеза. Према ознакама из примјера 8.1.2. биће

$$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{a_1^{\,2}\sqrt{3}}{4} + 3 \cdot \frac{a + a_1}{2} h = 60 + 17\sqrt{3}\ .\blacklozenge$$

Примјер 8.2.3. Дате су ивице a и a_1 основа правилне петостране зарубљене пирамиде и угао φ нагиба бочне стране према равни основе. Изразити помоћу ових података површину пирамиде.

Рјешење. На сљедећој слици је дата правилна петострана зарубљена пирамида



чија је доња основа правилан петоугао $ABCDE$ странице a, горња основа сличан петоугао $A_1B_1C_1D_1E_1$ основе a_1, и нагиб бочне стране према доњој основи $\angle OGF = \varphi$.

Висина зарубљене пирамиде је $H = H_2 - H_1 = FO - FO_1$. Апотема $h = GG_1$ је висина трапеза BCC_1B_1. $OG = r$ и $O_1G_1 = r_1$. Из правоуглих троуглова BGO и $B_1G_1O_1$ основа слиједи

$r = \frac{a}{2}\text{tg } 54°$ и $r_1 = \frac{a_1}{2}\text{tg } 54°$ (примјер 6.2.4.). Из правоуглог трапеза OGG_1O_1 слиједи $h = \Delta r \sin \varphi$, $H = \Delta r \text{ tg } \varphi$, гдје је $\Delta r = r - r_1 = \frac{a - a_1}{2}\text{tg } 54°$. Површина ове зарубљене пирамиде једнака је збиру површина двије основе и пет бочних трапеза, тј. $P = 5 \cdot \frac{ar}{2} + 5 \cdot \frac{a_1 r_1}{2} + 5 \cdot \frac{a + a_1}{2} h = \frac{5}{4}\left((a^2 + a_1^2) + (a^2 - a_1^2)\sin\varphi\right)\text{tg } 54°$.♦

Задаци 8.2.4.

1. Основне ивице правилне зарубљене четворостране пирамиде су 7 и 3, а висина пирамиде је 5. Колика је бочна ивица?

$[\sqrt{31}]$

2. Основне ивице правилне зарубљене тростране пирамиде су 5 и 2, а бочна ивица пирамиде је 2. Колика је висина пирамиде?

$[\sqrt{13}]$

3. Основне ивице правилне зарубљене тростране пирамиде су 10 и 4, а бочна страна са већом основом пирамиде образује угао 60°. Колика је висина пирамиде?

[3]

4. Основне ивице правилне тростране зарубљене пирамиде су 5 и 3. Бочна ивица са већом основом образује угао 45°. Колика је површина омотача пирамиде?

$[4\sqrt{15}]$

5. Одредити површину омотача правилне четворостране зарубљене пирамиде основних ивица a и b, чије су бочне стране тангентни трапези.

$[2\sqrt{ab}(a+b)]$

6. Наћи површину правилне тростране зарубљене пирамиде висине 3 m, чије су основне ивице 8 m и 2 m.

$[103\sqrt{3}\ \text{m}^2]$

8.3. Запремина зарубљене пирамиде

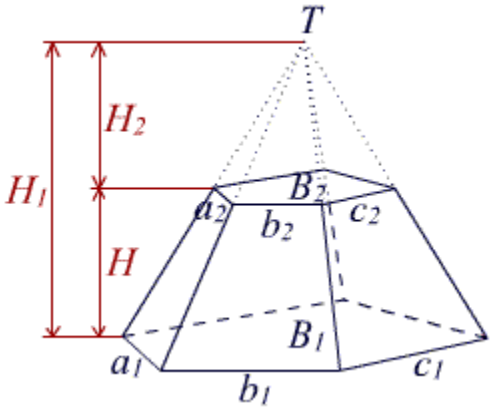
Када са равни паралелном основи одсјечете врх пирамиде добијате зарубљену пирамиду коју још називамо и крња, или пресјечена пирамида.

Став 8.3.1. Ако су површине основа зарубљене пирамиде једнаке B_1 и B_2, а дужина висине H, онда је запремина те пирамиде

$$V = \frac{H}{3} \cdot \left(B_1 + \sqrt{B_1 B_2} + B_2\right).$$

Доказ: Ако су одговарајуће ивице доње основе a_1, b_1, c_1, ... и горње основе a_2, b_2, c_2, ... онда су висине H_1 и H_2 од врха T, тачке пресјека правих на којима леже одговарајућа тјемена основа, до основа у размјери $H_1 : H_2 = a_1 : a_2 = b_1 : b_2 = c_1 : c_2 = \ldots$, а површине основа се односе као квадрати тих ивица и према томе као квадрати висина $B_1 : B_2 = H_1^2 : H_2^2$, а запремине одговарајућих пирамида као кубови висина $V_1 : V_2 = H_1^3 : H_2^3$, или као размјера производа површине основа и

одговарајуће висине $V_1 : V_2 = (B_1H_1) : (B_2H_2)$. То слиједи из хомотетије базних многоуглова.



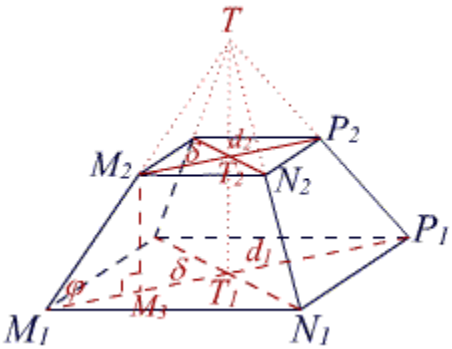
Запремина зарубљене пирамиде (V) једнака је разлици запремина веће (V_1) и мање пирамиде (V_2), тј. $V = V_1 - V_2$. Зато је $V = V_1\left(1 - \frac{V_2}{V_1}\right) = \frac{B_1H_1}{3}\left(1 - \frac{H_2^3}{H_1^3}\right) = \frac{B_1}{3} \cdot \frac{H_1^3 - H_2^3}{H_1^2}$. Даље, растављамо на факторе разлику кубова висина $H_1^3 - H_2^3 = (H_1 - H_2)(H_1^2 + H_1H_2 + H_2^2)$, гдје је $H_1 - H_2 = H$. Отуда

$$V = \frac{B_1H}{3}\left(1 + \frac{H_2}{H_1} + \frac{H_2^2}{H_1^2}\right) = \frac{B_1H}{3}\left(1 + \sqrt{\frac{B_2}{B_1}} + \frac{B_2}{B_1}\right) = \frac{H}{3}\left(B_1 + \sqrt{B_1B_2} + B_2\right).\blacklozenge$$

У посебном случају када су горња и доња основа подударне $B_1 = B_2 = B$ и имамо призму. Запремина према истој формули је $V = BH$, тј. већ позната запремина призме.

Примјер 8.3.2. Већа основа крње пирамиде је правоугаоник дијагонале дужине d_1 са оштрим углом између дијагонала δ. Бочне ивице пирамиде су нагнуте према равни веће основе под углом φ, а висина зарубљене пирамиде је H. Колика је запремина те пирамиде? Посебно, колика је запремина ако је $d_1 = 6\sqrt{3}$, $\delta = \varphi = 30°$, $H = 2$?

Рјешење: Површина доње основе на слици је $B_1 = \frac{1}{2}d_1^2 \sin\delta$. Окомита



пројекција тачке M_2 на раван доње основе је M_3 која се налази на дијагонали $d_1 = M_1N_1$, што значи да је $\angle M_3M_1M_2 = \varphi$.

Према томе $M_1M_3 = H \operatorname{ctg}\varphi$, дијагонала горње основе $d_2 = d_1 - 2H \operatorname{ctg}\varphi$, а површина горње основе $B_2 = \frac{1}{2}d_2^2 \sin\delta$. Запремина је $V = \frac{H}{3} \cdot \left(B_1 + \sqrt{B_1B_2} + B_2\right)$. Посебно, $B_1 = 27$, $d_2 = 2\sqrt{3}$, $B_2 = 3$ и $V = 26$.

Примјер 8.3.3. Гранитни подупирач има облик правилне четворостране пресјечене пирамиде висине 3,6 m, основних ивица 2,8 m и 2,0 m. Колика је маса подупирача, ако је густина гранита $\rho = 2{,}5\cdot 10^2$ kg/m^3?

Рјешење: Површине квадратних основа су $B_1 = 7{,}84$ m^2 и $B_2 = 4{,}00$ m^2, па је запремина подупирача $V = \frac{3{,}6}{3}\left(7{,}84 + \sqrt{7{,}84\cdot 4{,}00} + 4{,}00\right) = 20{,}93$ m^3. Маса је производ запремине и густине $M = V\cdot\rho = 5232$ kg.♦

Задаци 8.3.4.

1. На ком растојању од врха треба пресјећи пирамиду паралелно основи да би се њена запремина подјелила у размјери m:n?

$$[\, H\cdot\sqrt[3]{\frac{m}{m+n}}\,]$$

2. Израчунати запремину правилне четворостране зарубљене пирамиде основних ивица 7 и 5 метара, дијагонале 9 метара.

[109 m^3]

3. Израчунати запремину правилне шестостране пресјечене пирамиде основних ивица 7 и 5 метара, бочне ивице 4 метара.

[654 m^3]

4. Израчунати запремину правилне тростране крње пирамиде основних ивица 7 и 5 метара, бочне стране нагнуте према већој основи под углом 60°.

$$[\frac{109\sqrt{3}}{12}\ \text{m}^3]$$

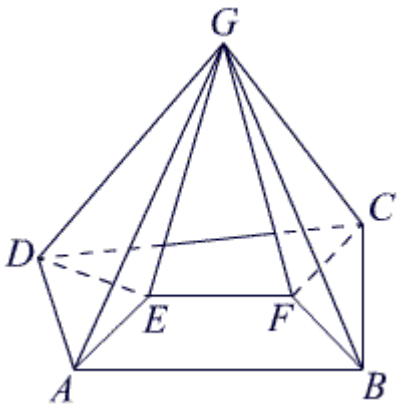
5. Израчунати запремину правилне тростране пресјечне пирамиде основних ивица 7 и 5 метара, бочне ивице нагнуте према већој основи под углом 60°.

$$[\frac{109\sqrt{3}}{6}\ \text{m}^3]$$

9. Правилни полиедри

Полиедарска површ је затворена површ састављена од многоуглова који немају заједничких унутрашњих тачака и чија су тјемена врхови тачно једне рогаљске површи одређене неким од тих многоуглова.

Призма, пирамида и зарубљена пирамида су примјери полиедара, а њихове површи су полиедарске површи.



Међутим, омотач пирамиде није затворена површ и према томе није полиедарска површ.

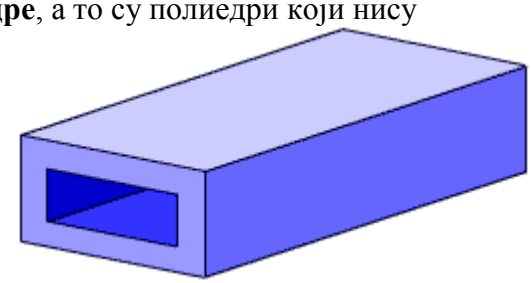
Такође, као на слици десно, ако на тространу „призму“ *ABCDEF* додамо два омотача тространих пирамида *AEDG* и *BCFG*, добићемо фигуру која није полиедарска површ, јер је *G* тјеме двије рогаљске површи из истог скупа многоуглова која чине дату фигуру.

Сусједни многоуглови имају једну заједничку страницу. Уопште, за скуп многоуглова кажемо да је **повезан** када за било које два многоугла из тог скупа постоји низ многоуглова из тог скупа који су сусједни многоуглови.

Затворен скуп многоуглова је скуп таквих многоуглова да је свака страница тих многоуглова уједно страница још једног од њих. Подразумјева се да свака два многоугла који улазе у састав полиедарске површи леже у различитим равнима.

Полиедар је унија полиедарске површи и њене унутрашње области. При томе се тјемена, стране и ивице полиедарске површи називају тјемена, стране и ивице полиедра.

Овдје разматрамо само **конвексне полиедре**, а то су полиедри који нису „шупљи“, или тачније само оне полиедре који ће садржавати цијелу произвољну дуж ако садрже крајеве те дужи.



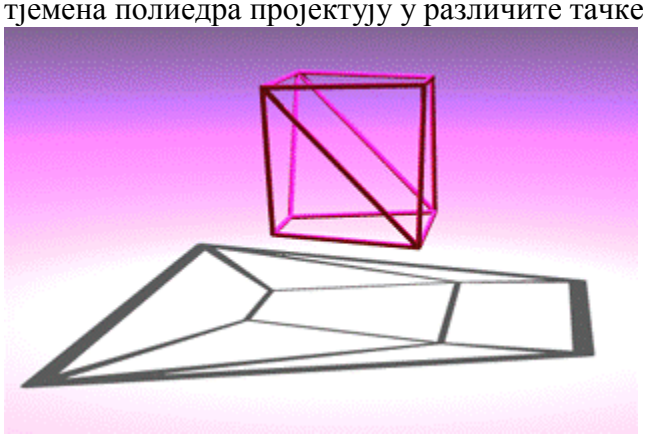
На слици десно је неконвексан полиедар, полиедар са „шупљином“. Дуж која би спајала двије тачке преко „шупљине“ дјелом не би лежала у полиедру.

Примјер 9.1. Број ивичних углова свих страна полиедра једнак је двоструком броју његових ивица.

Доказ: Страна полиедра има углова колико ивица (страница). Ако полиедар има s страна са по $i_1, i_2, ..., i_s$ ивица, тада је укупан број углова свих страна $i_1 + i_2 + ...+ i_s$. Међутим, свака ивица полиедра је заједничка двјема странама полиедра па је наведени збир двоструко већи од броја свих ивица. Према томе, број углова свих страна полиедра једанк је двоструком броју његових ивица.♦

Примјер 9.2. Збир S свих ивичних углова полиедра је $S = (t - 2)360°$, гдје је t број његових тјемена.

Доказ: Пројектујмо дати полиедар нормално на раван σ тако одабрану да се сва тјемена полиедра пројектују у различите тачке и нити једна од страна у дуж.



Тада, свака од страна полиедра и њен пројектовани многоугао имају једнак број ивица, једнак број тјемена и једнак збир унутрашњих углова.

Стране полиедра два пута покривају раван σ, па приликом сабирања углова у пројекцији углове у тјеменима на равни треба узимати два пута. Пројекцијом добијена многоугаона површ је два пута покривена површинама полиедра. Ако пројектована многоугаона површ има k тјемена, дати полиедар има $t - k$ тјемена које су у пројекцији унутрашње тачке, па је

$$S = (k - 2)360° + (t - k)360° = (t - 2)360°.\blacklozenge$$

Став 9.3. (Ојлерова теорема) Ако је t број тјемена, s број страна, i број ивица произвољног конвексног полиедра тада је: $t + s = i + 2$.

Доказ: Нека дати произвољни конвексни полиедар има s страна. Нека је прва страна полиедра многоугао са i_1 ивица (страница), друга многоугао са i_2 ивица, трећа са i_3 ивица, ... , s-та са i_s ивица. Збир свих унутрашњих (ивичних) углова тог полиедра је $S = (i_1 - 2)180° + (i_2 - 2)180° + \ \dots + (i_s - 2)180°$

$$= (i_1 + i_2 + \dots + i_s)180° - s360°$$
$$= 2i180° - s360°,$$

јер је $i_1 + i_2 + \dots + i_s = 2i$ (примјер 9.1.).
Са друге стране (примјер 9.2.) имамо $S = (t - 2)360°$, па је

$$2i\cdot 180° - s\cdot 360° = (t - 2)360° \ \text{ одакле излази}$$
$$t + s = i + 2.\blacklozenge$$

Примјер 9.4. Ако се у сваком тјемену полиедра сустиче m ивица, а свака страна полиедра има n ивица (број граничних линија стране), тада је

$$tm = 2i,\ \ sn = 2i,\ \ 2mn = (2m + 2n - mn)\cdot i,$$

гдје је t број тјемена, s број страна, а i број ивица тог полиедра.

Доказ: Број углова свих страна полиедра једнак је двоструком броју његових ивица (9.1). Ако свака страна има n ивица, тада има n углова, па је укупан број углова sn. Према томе је $sn = 2i$, гдје је s број страна, а i број ивица полиедра.

Поред тога, број углова свих страна полиедра можемо наћи и помоћу његових тјемена. Ако се у сваком тјемену стиче m ивица, тада има m углова око једног тјемена, па је укупан број углова tm, гдје је t број тјемена полиедра. Дакле, важи и релација $tm = 2i$.

Ако је полиедар још и конвексан, замјењујући $t = 2i/m$ и $s = 2i/n$ у Ојлеровој теореми (став 8.3.) $t + s = i + 2$, добијамо $\frac{2i}{m} + \frac{2i}{n} = i + 2$ односно

$$i = \frac{2mn}{2m + 2n - mn}.\blacklozenge$$

Конвексан **полиедар је правилан** када су све његове стране правилни многоуглови, са једнаким бројем страница и када сви његови рогљеви имају једнак број ивичних углова. Рецимо, правилна призма јесте полиедар, али није правилан осим ако је коцка.

Из дефиниције правилног полиедра произилази да су му све ивице међусобно једнаке, да су му сви ивични углови међусобно једнаки и да су му све стране међусобно једнаке.

Став 9.5. Постоји тачно пет правилних полиедара. Они у сваком свом тјемену имају редом по:

1. три (једнакостранична) троугла,
2. три четвороугла (квадрати),
3. три (правилна конвексна) петоугла,
4. четири троугла, и по
5. пет троуглова.

Доказ: Како је збир углова конвексног рогља мањи од 360° (став 4.3.1.) то за n (n = 3, 4, 5, …) број страница правилног многоугла (страна полиедра) и угао многоугла $\alpha = \frac{n-2}{n} \cdot 180°$ то мора бити $m \cdot \alpha < 360°$, гдје је m (m = 3, 4, 5, …) број ивица у једном тјемену полиедра.

Из $m \cdot \frac{n-2}{n} \cdot 180° < 360°$ слиједи $mn - 2m < 2n$ па $\frac{1}{n} + \frac{1}{m} > \frac{1}{2}$.

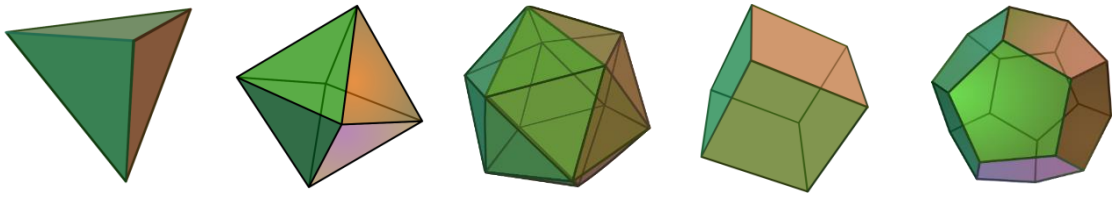
Отуда, за $n \geq 3$ је $m < 6$ и обрнуто, из $m \geq 3$ је $n < 6$. Посебно, та неједнакост је тачна само у сљедећих пет случајева:

$$n = m = 3;\ n = 3, m = 4;\ n = 3, m = 5;\ n = 4, m = 3;\ n = 5, m = 3.\blacklozenge$$

Примјер 9.6. Правилни полиедри су тетраедар са четири једнаке стране (троуглови), октаедар са осам страна (троуглови), икосаедар са двадесет страна

(троуглови), хексаедар (тј. коцка) са шест страна (квадрати) и додекаедар са дванаест страна (петоуглови).

1. 2. 3. 4. 5.



тетраедар октаедар икосаедар хексаедар додекаедар

Доказ: Ако са n означимо број страница правилног многоугла, са m број ивица у једном тјемену правилног полиедра, t број тјемена, s број страна, i број ивица тог полиедра видјели смо да је тада:

$$ns = 2i,\ mt = 2i,\ t + s = i + 2 \text{ и } \frac{1}{n} + \frac{1}{m} > \frac{1}{2}$$

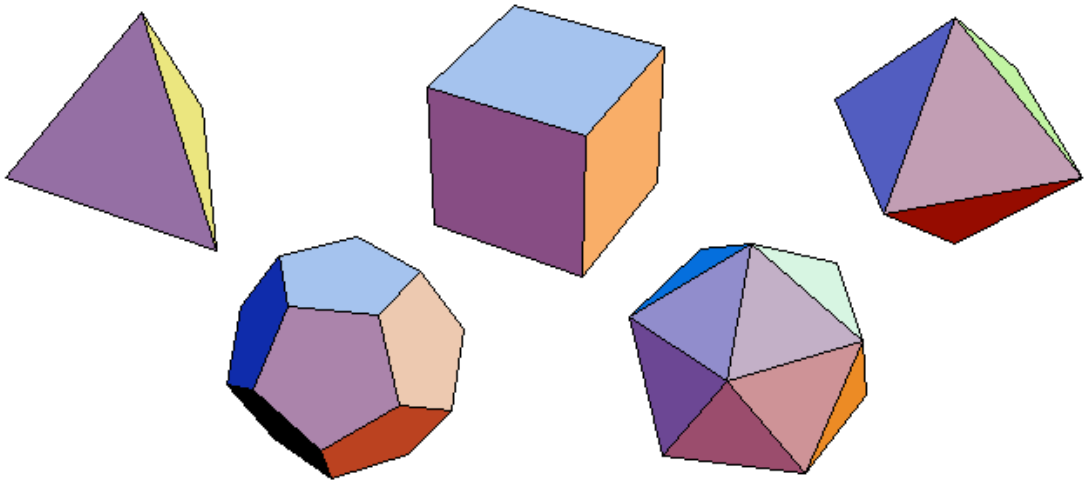
па можемо израчунати број тјемена, страна и ивица у сваком од пет правилних полиедара:

1. Ако је $n = 3$, $m = 3$, тада је $t = 4$, $s = 4$, $i = 6$ и имамо **правилан тетраедар**, који има четири стране једанкостраничне троуглове.
2. Ако је $n = 3$, $m = 4$, тада је $t = 6$, $s = 8$, $i = 12$ и имамо **правилан октаедар** који има осам страна једанкостраничних троуглова.
3. Ако је $n = 3$, $m = 5$, тада је $t = 12$, $s = 20$, $i = 30$ и имамо **правилни икосаедар** који има двадесет страна једнакостраничних троуглова.
4. Ако је $n = 4$, $m = 3$, тада је $t = 8$, $s = 6$, $i = 12$ и имамо **правилан хексаедар** (коцка) који има шест страна, квадрата.
5. Ако је $n = 5$, $m = 3$, тада је $t = 20$, $s = 12$, $i = 30$ и имамо **правилан додекаедар** који има дванаест страна правилних петоуглова.♦

Дуалан полиедар има тјемена у тачкама које су средине (тежишта) страница датог полиедра. Ојлерова једнакост ($t + s = i + 2$) замјеном бројева тјемена и страна (t, s) показује да ако је један полиедар дуалан другом тада је и обрнуто, други полиедар дуалан са истим првим.

На примјер, тетраедру је дуалан тетраедар. Октаедру је дуална коцка, а коцки је дуалан октаедар. Додекаедар и икосаедар су дуални полиедри.

Платонова тијела је други назив за пет правилних полиедара, које је међу првима детаљно описао Платон у једном од својих дијалога (Тимаиос, 350. г.п.н.е.). Тетраедар је називао елементом ватре, хексаедар земље, икосаедар воде, октаедар ваздуха, а додекаедар је сматрао елементом супстанце свемира. Данас их је уобичајено поредати према броју страна: тетраедар (4), хексаедар (6), октаедар (8), додекаедар (12) и икосаедар (20).



Примјер 9.7. Колике су површине и запремине правилних полиедрара?

Рјешење: Површину полиедра добићемо као збир површина многоуглова, страна полиедра. Запремину добијамо сабирајући запремине пирамида чије су базе стране полиедра, а висине полупречници уписаних лопти.

Нека је s број страна правилног полиедра странице a, нека је r полупречник уписане лопте у полиедар. Површину једне стране датог полиедра означимо $A_s(a)$, а укупну површину полиедра P_s. Запремину полиедра означимо са V_s. Тада, површина и запремина су у изразима:

$$P_s = s\cdot A_s(a),\ \ V_s = \frac{sr}{3}\cdot A_s(a)\ = \frac{r}{3}\cdot P_s\,.$$

Посебно, површине и запремине ових пет тјела су:

$$P_4 = a^2\sqrt{3}\,,\ P_6 = 6a^2\,,\ P_8 = 2a^2\sqrt{3}\,,\ P_{12} = 3\sqrt{5(5+2\sqrt{5})}a^2\,,\ P_{20} = 5a^2\sqrt{3}\,;$$

$$V_4 = \frac{a^3}{6\sqrt{2}}\,,\ V_6 = a^3\,,\ V_8 = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}\,,\ V_{12} = \frac{5+7\sqrt{5}}{4}a^3 \text{ и } V_{20} = \frac{5(3+\sqrt{5})}{12}a^3\,.\blacklozenge$$

Задаци 9.8.

1. Доказати да је збир удаљености из произвољне унутрашње тачке правилног тетраедра до страна тетраедра једнак висини тетраедра.

[помоћу запремина]

2. Правилни тетраедар:

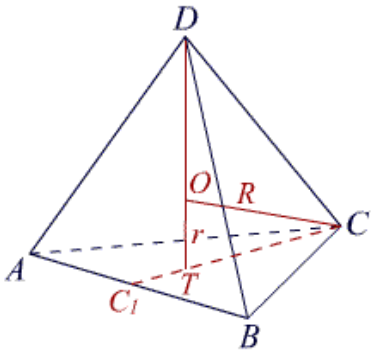
а. Колико има оса симетрије?

б. Колико има равни симетрије?

в. Колико има равни које су подједнако удаљене од тјемена?

[3, 6, 7]

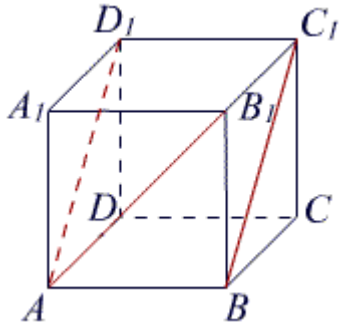
3. На слици десно, дат је правилан тетраедар $ABCD$ ивице дужине a.



а. Наћи удаљеност мимоилазних ивица AD и BC ?
б. Колика је висина DT ?
в. Колика је запремина тетраедра?
г. Колики је полупречник r њему уписане и полупречник R њему описане лопте?
д. У ком омјеру тачка O дијели висину DT ?

[$\frac{a\sqrt{2}}{2}$, $\frac{a\sqrt{6}}{3}$, $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$, $\frac{a\sqrt{6}}{12}$ и $\frac{a\sqrt{6}}{4}$, 3:1]

4. Дата је коцка (правилан хексаедар) $ABCDA_1B_1C_1D_1$, на слици десно.



а. Наћи угао између дијагонала које полазе из истог тјемена сусједних страна коцке $\angle(AB_1, AD_1)$.
б. Наћи угао између дијагонала које спајају различита тјемена сусједних страна коцке $\angle(AB_1, BC_1)$.

[60°, 60°]

5. Дата је коцка ивице a. Одредити растојање између мимоилазних дијагонала сусједних страна коцке.

[$\frac{a}{\sqrt{3}}$, в. примјер 6.1.2.]

6. Одредити пресјек равни окомите на средиште главне дијагонале коцке и коцке.

[правилан шестоугао]

7. Дат је правилни октаедар ивице a.

а. Изразити његову површину у функцији ивице.
б. Изразити његову запремину.
в. Изразити полупречник уписане лопте.
г. Изразити полупречник описане лопте.

[$2a^2\sqrt{3}$, $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$, $\frac{a\sqrt{6}}{6}$, $\frac{a\sqrt{2}}{2}$]

7. Дат је правилан додекаедар ивице a. Доказати да је његова површина једнака

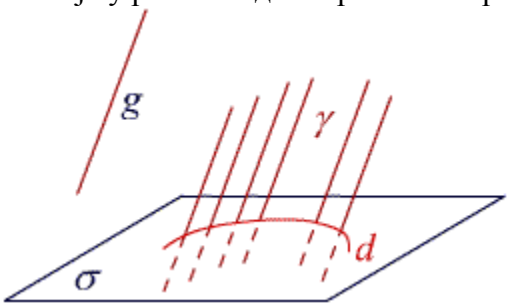
$$3\sqrt{25+10\sqrt{5}}a^2 \approx 20{,}64572\ a^2.$$

8. Дат је правилан икосаедар ивице a. Доказати да је његова површина једнака

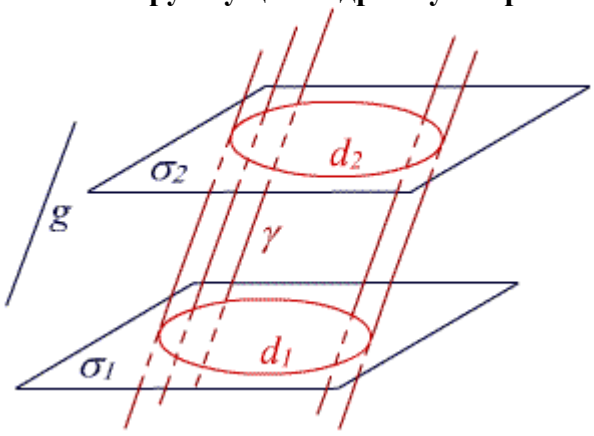
$$5a^2\sqrt{3} \approx 8{,}66025\ a^2.$$

III Обртна тијела

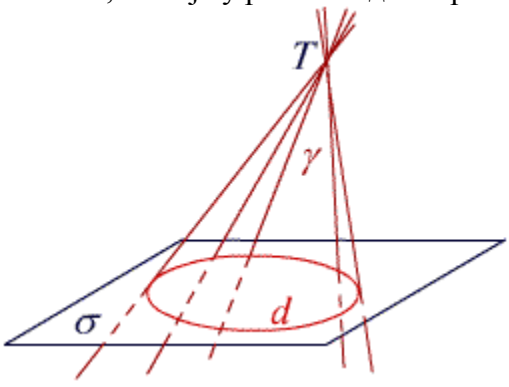
Нека је у равни σ дата крива d и права g која са равни σ има само једну заједничку тачку. Скуп γ свих правих у простору које су паралелне правој g и садрже тачке криве d формирају површ коју називамо **цилиндрична површ.** Криву d називамо **директрисом** или водиљом, а праву g називамо **генератрисом** или изводницом. Праве које образују цилиндричну површ такође називамо генератрисама или изводницама.



Специјално, ако је крива d кружница имаћемо **кружну цилиндричну површ.** Када кружну цилиндричну површ γ пресјечемо са двије паралелне равнине σ_1 и σ_2, паралелне равни директрисе σ, тијело ограничено тим равнима и цилиндричном површи називамо **кружни ваљак.** Кругове d_1 и d_2 који припадају паралелним равнима σ_1 и σ_2 и ограничавају ваљак називамо **основе ваљка** или базе ваљка, а дио цилиндричне површи између паралелних равни називамо **омотач ваљка**. Уколико је генератриса g окомита на раван σ директрисе, ваљак називамо **прави кружни ваљак**. Иначе, имамо **коси кружни ваљак.**



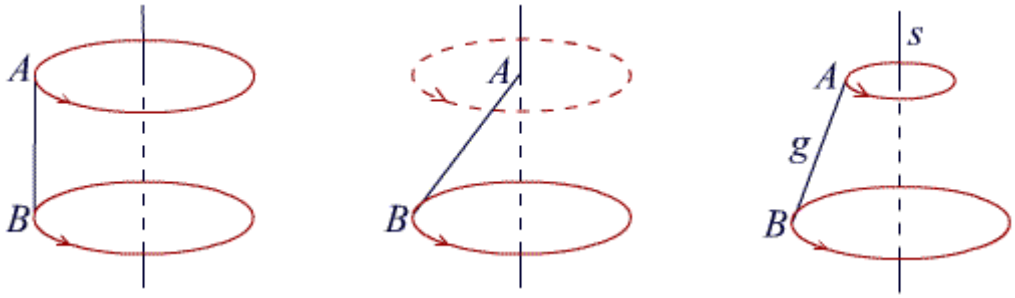
Слично, нека је у равни σ дата крива d и тачка T изван равни σ. Скуп свих правих које садрже тачку T и неку тачку криве d формирају површ коју називамо **конусна површ**. Криву d називамо **директрисом** или изводницом конусне површи, а тачку T називамо **тјеменом** или врхом конусне површи.



Посебно, ако је крива d кружница имаћемо **кружну конусну површ.** Тијело ограничено равни σ директрисе и кружном конусном површи називамо **кружни конус** или кружна купа, а тачку T називамо **врх купе**. Слично као код ваљка, конусну површ кружне купе називамо **омотач купе**, а круг d **основом купе** или базом купе. Удаљеност од врха купе до равни основе називамо **висина** купе. Уколико се врх купе окомито пројектује у центар круга основе, купу називамо **права кружна купа**. Иначе, имамо **косу кружну купу.**

Ако купу пресјечемо једном равни паралелном равни основе, између двије равни добићемо **зарубљену купу**, која такође може бити **права** и **коса зарубљена купа**, зависно од тога да ли је дио праве или косе купе.

Обртну или ротациону **површ** добијамо обртањем, тј. ротацијом криве g око праве s за пун угао (360°). Праву s називамо **осом обртања** или осом ротације. На примјер, обртањем дужи AB око осе s, зависно од положаја дужи према оси добићемо омотаче правог ваљка, праве купе и праве зарубљене купе, као на сљедећим сликама.

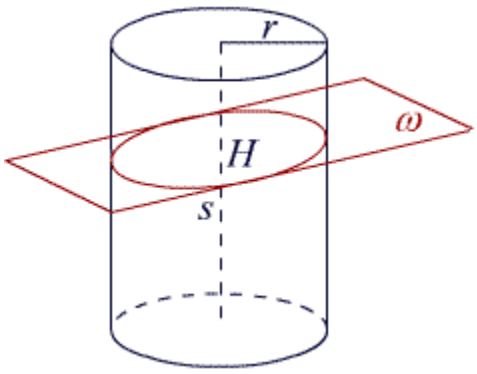


ваљак купа зарубљена купа

Обртањем кружне линије око осе која садржи њен пречник добијамо обртну површ коју називамо **лопта** или сфера.

10. Ваљак

Прави кружни ваљак се састоји из две основе (базе), два подударна круга кроз чије центре пролази оса симетрије ваљка, и од омотача ваљка, цилиндричне површи чије су тачке једнако удаљене од осе. **Висина ваљка** је растојање равни основа. Дуж у омотачу ваљка која спаја основе назива се **изводница.**

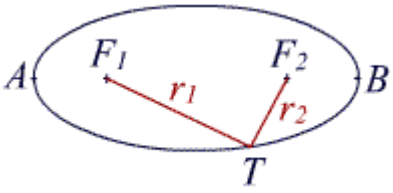


На слици лијево, прави кружни ваљак у базама (основама) има кругове радијуса (полупречника) r, има осу симетрије s и висину H. Најкраћу дуж омотача ваљка која спаја основе називамо изводница.

Пресјек цилиндричне површи (на сл. раван ω) је **елипса**, у случају да раван сјече осу. У случају да је раван окомита на осу, пресјек је кружница. У случају да је раван (ω) паралелна са осом, пресјек равни и ваљка је правоугаоник.

10.1. Линије ваљка

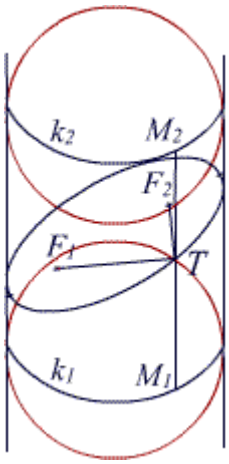
Елипса је геометријско мјесто тачака (T) у равни чији је збир удаљености ($r_1 + r_2$) до двије фиксне тачке (F_1 и F_2) константан. Те фиксне тачке зовемо **фокуси**, или жиже елипсе, а константну дужину (AB) зовемо (велика) оса елипсе.
Кружница је посебан случај елипсе када су фокуси у истој тачки, у центру круга.



У складу са овом дефиницијом, елипсу цртамо држећи оловку у покретној тачки T равни затежући конац F_1TF_2 чији крајеви остају причвршћени у фокусима F_1 и F_2. Такође из исте дефиниције произилази да ће вода у посуди облика елипсе додирнута у једној жижи произвести таласе који ће се након одбијања од зидова посуде сви концентрисати у другој жижи.

Теорем 10.1.1. Када је пресјек равни и кружне цилиндричне површи затворена кружна линија, она је увијек елипса.

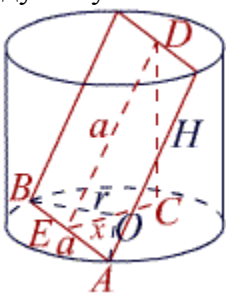
Доказ (Г. П. Данделин, 1822.). На слици десно су приказане кружна цилиндрична површ пресјечена равнином косо и произвољна заједничка тачка T тог пресјека. Испод и изнад равнине су лопте уписане у цилиндар, које додирују равнину редом у тачкама F_1 и F_2. Лопте и цилиндар се сјеку по паралелним кружницама k_1 и k_2.



Тангентни одсјечци F_1T и TM_1 су једнаки, а такође и одсјечци F_2T и TM_2. То значи да је збир дужи од тачке T до тачки F_1 и F_2 једнак константном растојању M_1M_2 паралелних кружница k_1 и k_2. Према томе, геометријско мјесто тачака T је елипса, а фиксне тачке F_1 и F_2 су фокуси, или жиже те елипсе.♦

Примјер 10.1.2. Дат је ваљак полупречника основе $r = 4$ и висине $H = 6$. Дио пресјека тог ваљка и косе равни је квадрат са тјеменима на кружницама основа. Наћи дужину странице a квадрата.

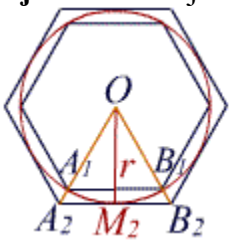
Рјешење: На сљедећој слици, страница квадрата $AB = a$, али је и $DE = a$. Означимо дужину EO са x. Из правоуглих троуглова CDE и AOE слиједи систем



једначина $a^2 = (2x)^2 + H^2$ и $x^2 = r^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$, уз услов да је посљедња разлика позитивна, да страница квадрата не може бити већа од пречника круга. Рјешавањем овог система добијамо $a = \sqrt{\frac{H^2 + 4r^2}{2}}$, односно $a = 5\sqrt{2} \approx 7{,}07$.♦

Примјер 10.1.3. У једнакостраничном кружном ваљку полупречника основе r уписана је и око њега је описана правилна шестострана призма. Одредити разлику површина омотача обе призме.

Рјешење: То је ваљак чији је осни пресјек квадрат странице 2 r. Дакле, висина ваљка и призми је $H = 2r$. Базни круг ваљка је описан и уписан око шестоуглова база призми. На слици лијево, страница уписаног шестоугла је $a_1 = A_1B_1$, а описаног $a_2 = A_2B_2$. Из једнакостраничних троуглова ABO слиједи $a_1 = r$ и $a_2 = \frac{2r\sqrt{3}}{3}$. Омотач призме је $M = 6 \cdot a \cdot 2r$ Отуда



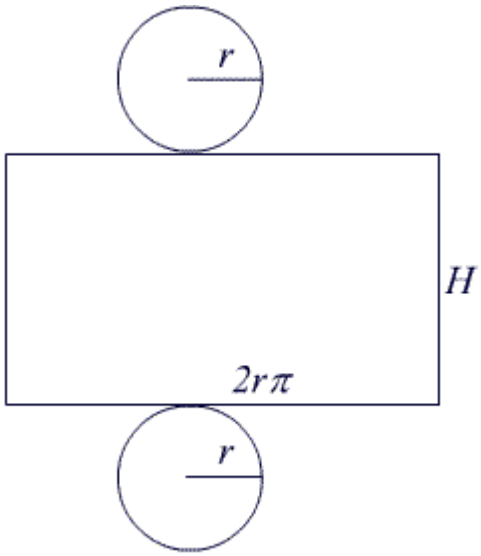
$\Delta M = M_2 - M_1 = 12r(a_2 - a_1) = 4r^2(2\sqrt{3} - 3)$.♦

Ако омотач правог кружног ваљка „расјечемо“ дуж изводнице и „размотамо“ добићемо правоугаоник чија је једна страница дужине обима круга основе ($2r\pi$), а друга дужине висине ваљка.

На слици десно видимо да је **површина правог кружног ваљка** једнака збиру површина два круга основа и омотача развијеног у правоугаоник, тј.

$$P = 2B + M \text{, односно}$$

$$P = 2r^2\pi + 2\pi \cdot rH$$
$$= 2\pi \cdot r(r + H),$$

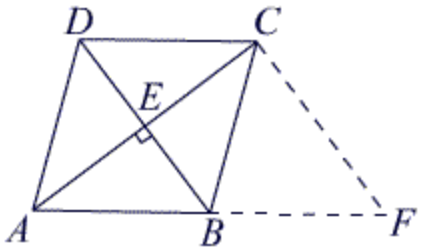


где је $\pi \approx 3{,}14159\ldots$.

Аналогно, површина **косог кружног ваљка** једнака је збиру површина два круга основа и омотача развијеног у паралелограм, једне странице дужине обима круга основе и висине једнаке висини ваљка. Према томе, претходна формула важи и за коси кружни ваљак.

Примјер 10.1.4. Ако се развије омотач једног кружног ваљка добије се ромб дијагонала 3 и 4. Наћи r и H ваљка.

Рјешење: Омотач ваљка је ромб $ABCD$ дијагонала $AC = 4$ и $BD = 3$ које се



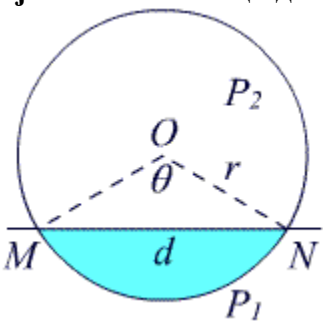
полове под правим углом. На слици лијево видимо правоугли троугао *AFC* страница 3, 4 и 5, гдје је $2\cdot 2r\pi = 5$. Висину ваљка добијамо изједначавањем површина тог троугла, из $\frac{3\cdot 4}{2} = \frac{5\cdot H}{2}$. Коначно $r = \frac{5}{4\pi}$ и $H = \frac{12}{5}$.♦

Запремина ваљка (правог, или косог) једнака је производу површине основе (базе ваљка) и висине ваљка, тј. $V = B\cdot H$, односно

$$V = r^2\pi\cdot H .$$

Примјер 10.1.5. Раван нормална на основу правог ваљка висине H = 10 cm одсјеца на основи тетиву дужине d = 5 cm. Овој тетиви одговара централни угао $\theta = 2\pi/3$. Израчунати запремине мањег и већег дијела ваљка.

Рјешење: На слици доле видимо базу ваљка подијељену тетивом *MN* на доњи, шрафирани и горњи одсјечак, чије су површине редом P_1 и P_2. Површина троугла *MNO* је $P_{\Delta MNO} = \frac{1}{2}r^2\sin\theta$. Ако је централни угао θ у радијанима, онда је површина исјечка $P_i = \frac{1}{2}r^2\theta$. Због $P_i = P_1 + P_{\Delta MNO}$ имамо површину доњег одсјечка $P_1 = \frac{r^2}{2}(\theta - \sin\theta)$.



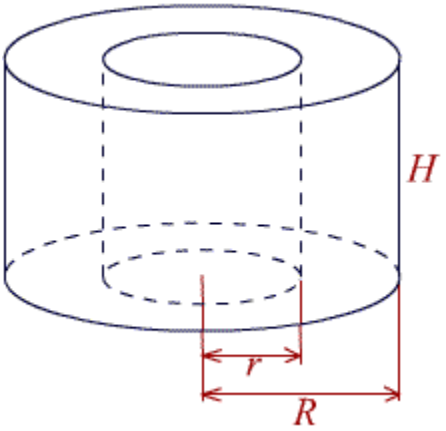
Због $r = \frac{d}{2\sin\frac{\theta}{2}} \approx 2{,}89$ cm, биће $P_1 = \frac{d^2}{8}\cdot\frac{\theta-\sin\theta}{\sin^2\frac{\theta}{2}} = \frac{d^2}{36}\cdot\left(4\pi - 3\sqrt{3}\right) \approx 0{,}20\cdot d^2$.

Запремина мањег дијела ваљка је $V_1 = P_1 H$, тј. $V_1 \approx 51$ cm^3. Како је запремина читавог ваљка $V = r^2\pi\cdot H \approx 262$ cm^3, то је запремина већег дијела $V_2 = V - V_1 \approx 211$ cm^3.♦

10.2. Површина ваљка

Примјер 9.2.1. Коју висину треба да има ваљак да би површина омотача била двоструко већа од површина обе основе?

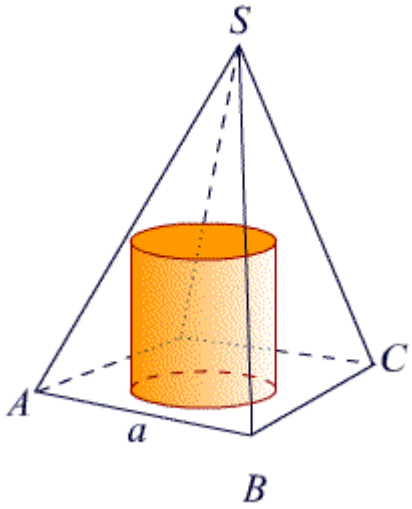
Рјешење: Површина омотача $M = 2r\pi H$, ваљка висине H и полупречника r кружних основа треба бити двоструко већа од површина $2B = 2r^2\pi$. Према томе $2r\pi H = 2r^2\pi$ одакле слиједи $r = H$. Висина ваљка треба бити једнака полупречнику основе.♦



Примјер 10.2.2. Наћи површину шупљег ваљка висине $H = 8$ и полупречника спољашњег и унутрашњег омотача, на слици лијево, $R = 7$ и $r = 6$.

Рјешење: Тражену површину можемо дефинисати формулом $P = 2 \cdot \Delta B + M_R + M_r$, гдје је кружни прстен основа површине $\Delta B = B_R - B_r = (R^2 - r^2)\pi$, а збир унутрашњег и вањског омотача $M_R + M_r = 2\pi(R + r)H$. Према томе, површина шупљег ваљка је $P = 2\pi(R + r)(R - r + H)$, тј. $P = 234\ \pi$.♦

Примјер 10.2.3. У правилну четворострану једнакоивичну пирамиду ивице a уписан је једнакостраничан ваљак, тако да су им основе у истој равни. Израчунати површину ваљка.



Рјешење: На слици десно имамо једнакостранични ваљак уписан у четворострану пирамиду *ABCDS*. Гледано са предње стране, ваљак се види као квадрат странице $2r = H$, уписан у једнакокраки троугао *ABS* основице a и кракова $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Помоћу релације сличности налазимо $H = a(\sqrt{2} - 1)$, а затим и тражену површину ваљка: $P = 6r^2\pi = \frac{3(3 - 2\sqrt{2})}{2} a^2\pi$.♦

Задаци 10.2.4.

1. Површина осног пресјека ваљка је $P_0 = 120$ cm^2, а површина основе $B = 78{,}54$ cm^2. Израчунати површину пресјека равни паралелне оси ваљка удаљене за $d = 3$ cm од осе.

[96,00 cm^2]

2. Ваљак полупречника основе r и висине H пресјечен је са равни паралелној оси. Ако је осни пресјек квадрат, наћи удаљеност равни од осе.

$[\sqrt{r^2 - \frac{H^2}{4}}]$

3. Осни пресјек ваљка је квадрат површине P_0. Колика је површина основе?

$[\frac{P_0\pi}{4}]$

4. Наћи релацију између полупречника основе r и висине H кружног ваљка, ако је њихов збир једнак полупречнику круга чија површина је једнака површини датог ваљка.

[$r = H$]

5. У кружни ваљак је уписана правилна шестоугаона призма. Наћи однос површина њихових омотача.

[$\pi : 3$]

6. Наћи површину ваљка описаног око коцке ивице a.

[$a^2\pi(1+\sqrt{2})$]

7. Наћи површину једнакостраничног ваљка (висина је једнака пречнику круга основе) ако му је површина омотача 80π cm^2.

[120 cm^2]

8. У ваљак је уписана правилна четворострана призма висине H и дијагонале нагнуте према изводници под углом α. Наћи површину омотача ваљка.

[$H^2 \cdot \operatorname{tg}\alpha$]

9. Висина кружног цилиндра (ваљка) је 10 центиметара дужа од радијуса базе. Површина (омотача) цилиндра је 144π cm^2. Наћи радијус базе и висину.

[4 cm, 18 cm]

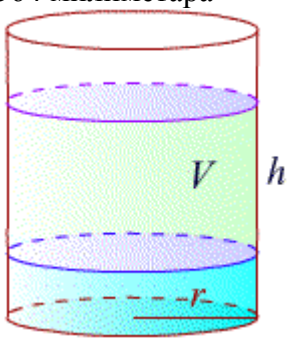
10. Наћи површину и запремину правилне тростране призме уписане у ваљак, ако је осни пресјек ваљка 12 cm^2, а дијагонала ваљка 5 cm.

[$24\sqrt{3}$ cm^2, $9\sqrt{3}$ cm^3; $\left(21+\frac{3}{8}\right)\sqrt{3}$ cm^2, $\frac{27\sqrt{3}}{4}$ cm^3]

10.3. Запремина ваљка

Запремина ваљка висине H и површине основе B је $V = BH$.

Примјер 10.3.1. У полупразан цилиндар полупречника r = 564 милиметара досуто је l = 10 литара текућине. За колико је повећан ниво течности?

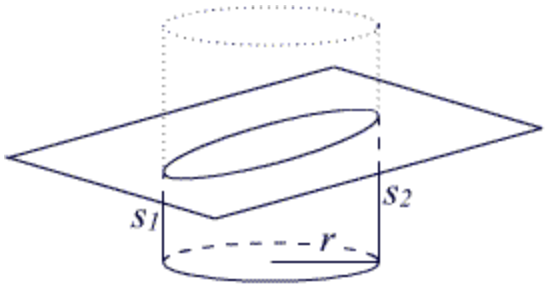


Рјешење: Досута течност има запремину $V = r^2\pi \cdot h$.

Према томе је ниво течности повећан за $h = \frac{V}{r^2\pi}$. Како је r = 5,64 дециметра, а 10 литара је 10 dm^3 то је ниво течности повећан за h = 0,10 dm.♦

Примјер 10.3.2. Прави ваљак полупречника основе r = 6 cm је пресјечен равнином тако да су му најмања и највећа изводница редом 7 и 9 центиметара. Колика је запремина добијеног цилиндричног тијела?

Рјешење: Пресјек ваљка и равни је елипса. Због симетрије елипсе, колико њена дужа изводница штрчи изнад центра елипсе, толико је мања испод. Односно,



центар елипсе је на висини која је аритметичка средина најмање и највеће изводнице цилиндра, тј. $\frac{s_1 + s_2}{2}$. Другим ријечима, када бисмо на доњи одсјечак додали још један исти такав горе, добили бисмо ваљак једнаког полупречника основе, висине $s_1 + s_2$ и двоструко веће запремине од тражене. Према томе, запремина доњег одсјечка је

$$V = r^2\pi \cdot \frac{s_1 + s_2}{2}, \text{ тј. } V = 288\pi\,\text{cm}^3.\blacklozenge$$

Примјер 10.3.3. Наћи запремину ваљка уписаног у правилну тространу призму запремине *V*.

Рјешење: Запремина призме је $V = BH = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}H$, гдје је *a* страница једнакостраничног троугла у бази призме. Полупречник уписаног круга у тај троугао је $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$. Запремина уписаног ваљка је

$$V_v = B_v H = r^2\pi H = \frac{1}{3\sqrt{3}} \cdot \left(\frac{a^2\sqrt{3}}{4}H\right) = \frac{1}{3\sqrt{3}}V.\blacklozenge$$

Задаци 10.3.4.

1. Одредити однос запремина два права ваљка ако су површине њихових омотача једнаке.

$[V_1 : V_2 = r_1 : r_2]$

2. Одредити однос површина омотача два права ваљка ако су им једнаке запремине.

$[M_1 : M_2 = r_2 : r_1]$

3. Наћи запремину ваљка уписаног у коцку ивице *a*.

$[\frac{a^3\pi}{4}]$

4. Наћи запремину ваљка уписаног у правилну шестострану призму ивица *a*.

$[\frac{3a^3\pi}{4}]$

5. У ваљак је уписана правилна тространа призма запремине *V*. Наћи запремину ваљка.

$[\frac{4\pi\sqrt{3}}{3} \cdot V]$

6. Правоугаоник површине *S* ротира око једне странице. Тачка пресјека дијагонала описује кружницу обима *l*. Изразити запремину ваљка добијеног том ротацијом.

$[Sl]$

7. У ваљак је уписана правилна тространа призма, затим је у призму уписан ваљак. Наћи однос запремина ваљака.

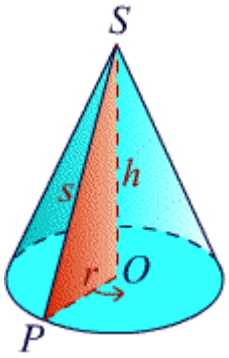
[4:1]

8. У ваљак је уписан правилан тетраедар ивице a тако да су му наспрамне ивице пречници основа ваљка. Колика је запремина ваљка?

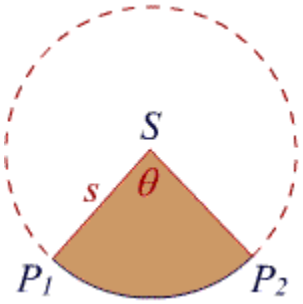
$$[\frac{a^3\pi\sqrt{2}}{8}]$$

11. Купа

Права кружна купа (конус, или стожац) настаје ротирањем правоуглог троугла око једне катете. На слици десно, троугао SPO са правим углом у тјемену O и катетама OS дужине h, PO дужине r и хипотенузом SP дужине s, ротира око усправне катете OS. Обртањем настаје купа са тјеменом S, омотачем који формира хипотенуза и основом насталим обртањем доње катете.



Изводнице праве кружне купе су једнаке дужине $SP = s$, што значи да оне у равни основе формирају кружницу. Тачка P троугла описује кружницу са центром у O обима $2r\pi$, гдје је полупречник $r = OP$ и $\pi = 3{,}14159...$. Угао у тјемену S купе γ двоструко је већи од угла OSP троугла. Када изрежемо омотач дуж изводнице и развијемо га у равни добићемо геометријско мјесто тачка P једнако удаљених од тачке S за дужину изводнице s, тј. добићемо кружни исјечак.



Омотач праве кружне купе је кружни исјечак полупречника s. Означимо површину омотача са M и централни угао са θ, као на слици лијево. Ако углове изражавамо радијанима, онда је $M = \frac{1}{2}s^2\theta$ и дужина лука $l = P_1P_2 = s\theta$. Са друге стране, тај лук у основи купе је кружница дужине $l = 2r\pi$, одакле слиједи $\theta = \frac{2r\pi}{s}$.

Увртавањем θ у M доказујемо сљедећи теорем.

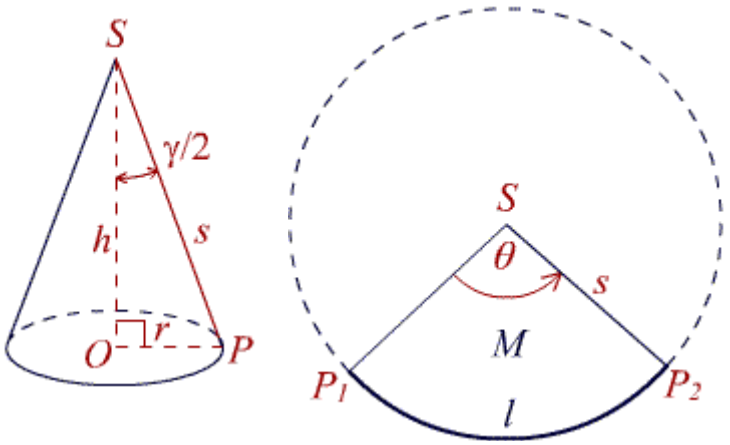
Теорем 11.а. Површина омотача праве кружне купе је $M = rs\pi$.♦

Примјер 11.б. Показати да су угао у тјемену праве кружне купе (γ) и централни угао (θ) размотаног омотача те купе, изражени у радијанима у релацији:

$$\theta = 2\pi \sin\frac{\gamma}{2}.$$

Рјешење: На првој слици десно приказане су купа полупречника основе r, са

изводницом s, и на другој слици њен размотан омотач.



Угао у врху купе је γ, па је у правоуглом троуглу OPS оштар угао у горњем тјемену γ/2. Отуда $\sin\frac{\gamma}{2}=\frac{r}{s}$. Обим основе те купе је $l = 2r\pi$. На другој слици је омотач M исте купе, кружни исјечак круга полупречника s са централним углом θ радијана. Дужина лука P_1P_2 је $l = s\theta$. Упоређивањем обима основе и дужине лука добијамо $2r\pi = s\theta$, тј. $\frac{r}{s}=\frac{\theta}{2\pi}$, а затим $\theta = 2\pi\sin\frac{\gamma}{2}$.♦

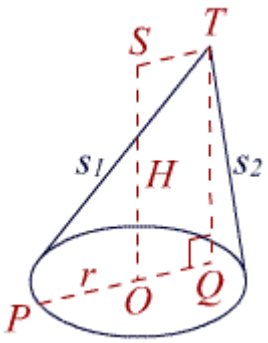
На примјер, купу са тјеменим углом 60° добијамо савијањем полукруга, јер за $\gamma=\frac{\pi}{3}$ израчунавамо $\theta = \pi$. Други примјер, исјецањем четвртине круга (θ = 90°) добијамо кружну капу са тјеменим углом (γ) близу 30°.

Укупна површина купе, или кратко површина је збир површина основе и омотача, тј. $P = B + M$.

Теорем 11.в. Површина праве кружне купе је $P = r\pi(r + s)$.

Доказ: Основа кружне купе има површину $B = r^2\pi$, омотач $M = rs\pi$, па је $P = r^2\pi + rs\pi$, а отуда тражена формула.♦

Коса кружна купа настаје премјештањем врха S у другу тачку T на истој висини у односу на раван основе. Тиме се мјењају дужине изводница ка тачкама на кружници основе купе.



Висина купе је удаљеност врха од равни основе (H), а основа је остала иста па је запремина косе купе опет једнака трећини производа површине основе и висине, тј.

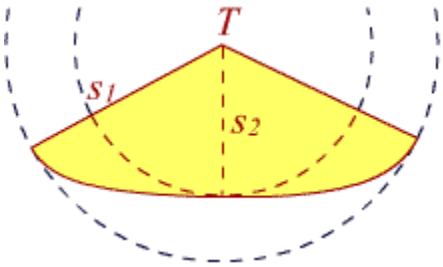
$$V=\frac{1}{3}r^2\pi\cdot H\,.$$

Омотач косе купе није кружни исјечак.

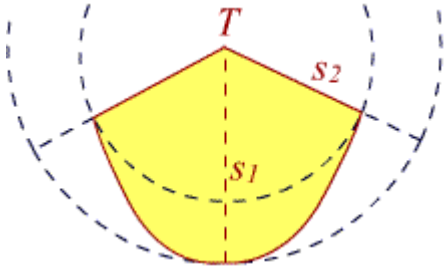
Примјер 11.г. Приказати изглед у равни омотача косе купе резан дуж:
i. најдуже; **ii.** најкраће изводнице.

Резултат: На сљедеће двије слике су у испрекиданим линијама концентрични кругови са центром T већег и мањег полупречника, редом s_1 и s_2. Унутар пуних линија шрафиран је омотач исте купе, али размотан у раван након резања дуж:

i. најдуже



ii. најкраће



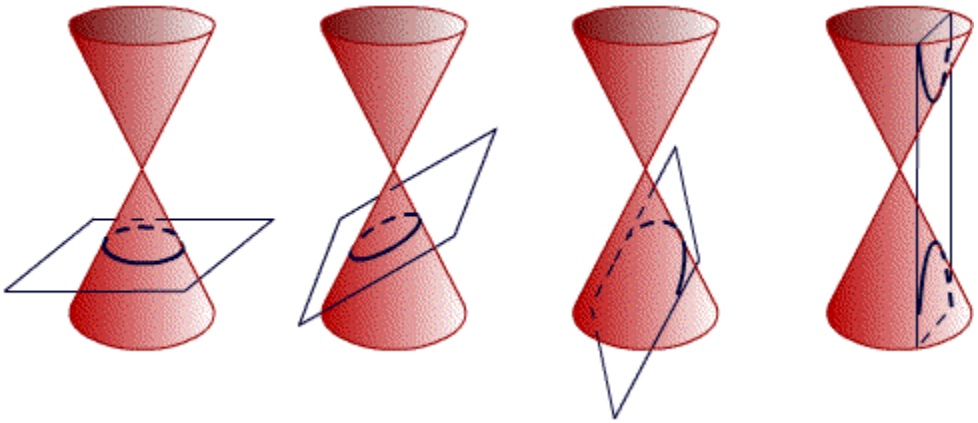
основице.♦

Иначе, под називом купа (или конус) подразумјева се права кружна купа.

Запремина купе једнака је трећини запремине ваљка исте основе и висине, тј. $V = \frac{1}{3}Bh$. Запремине купе и пирамиде су једнаке ако имају основе истих површина и једнаке висине. То је посљедица Кавањеровог принципа (5.3.) и теорема 6.2.1.

Теорем 11.д. Запремина купе је $V = \frac{1}{3}r^2\pi \cdot h$.♦

Конусни пресјек је пресјек равни и омотача купе (конуса). На сљедећој слици, са љева на десно видимо четири могућности положаја равни и купе:



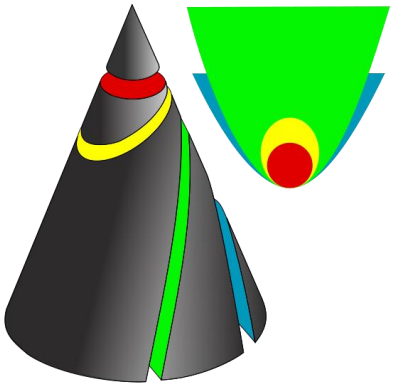
кружница, **елипса**, **парабола** и **хипербола**. Исте линије ћемо у аналитичкој геометрији називати криве другог реда. Овдје их добијамо када је пресјечна раван: окомита на осу купе, коса према оси, паралелна са изводницом купе и паралелна са осом купе.

11.1. Конусни пресјеци

Сви су изгледи да је фигуре настале пресјеком конуса (купе) и равни први проучавао Менеахмес (А. Грчка, око 375. – 325. г.п.н.е.) старатељ Александра

Великог. Грчки математичар Аполоније (око 262. – 190. г.п.н.е.) и касније Еуклид, поставили су основе геометрије елипсе, параболе и хиперболе, на основу конусних пресјека. Интересовање за ове фигуре је поново оживјело у периоду ренесансе открићем координатне геометрије Декарта и радовима Ферме, у пројективој геометрији Дезарга, Ла Хиреа и Паскала, или у Кеплеровим радовима планетарних кретања.

Примјер 11.1.1. На слици лијево, пресјек конуса и равни окомите на његову осу



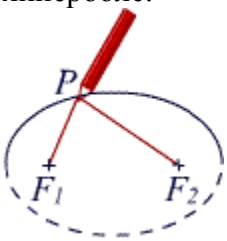
је **кружница** (црвено). Ако раван сјече све изводнице конуса и није нормална на његову осу, пресјек је **елипса** (жуто). Кружницу сматрамо посебним случајем елипсе.

Ако је раван паралелна са једном изводницом конуса, пресјек је **парабола** (зелено). Посебно, ако раван садржи тачно једну изводницу конуса, пресјек је **права.**

Ако је раван паралелна са двије изводнице конуса, пресјек је **хипербола** (плаво). Посебно, ако раван садржи двије изводнице конуса, пресјек су двије **праве линије**.

Ако на врх ове купе додамо подударну купу обратно, добијамо и другу симетричну грану хиперболе. На крају, ако раван садржи само врх конуса, пресјек је једна **тачка**.♦

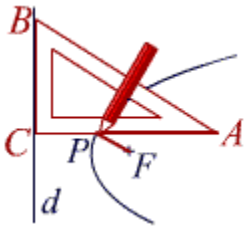
Примјер 11.1.2. Конусне пресјеке можемо конструисати помоћу сљедећих њихових особина које се често узимају за дефиниције елипсе, параболе и хиперболе.



Елипса је геометријско мјесто тачака (P) у равни чији је збир удаљености од двије фиксне тачке (F_1 и F_2) константан:

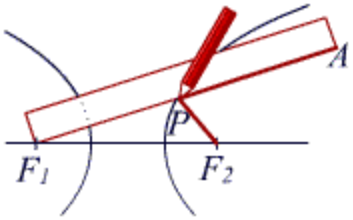
$$PF_1 + PF_2 = \text{const.}$$

Конац је причвршћен у тачкама F_1 и F_2.



Парабола је геометријско мјесто тачака (P) у равни чија је удаљеност од једне фиксне тачке (F) и праве (d) те равни једнака.

Конац је учвршћен крајевима A и F док троугао ABC катетом BC клизи правом d.



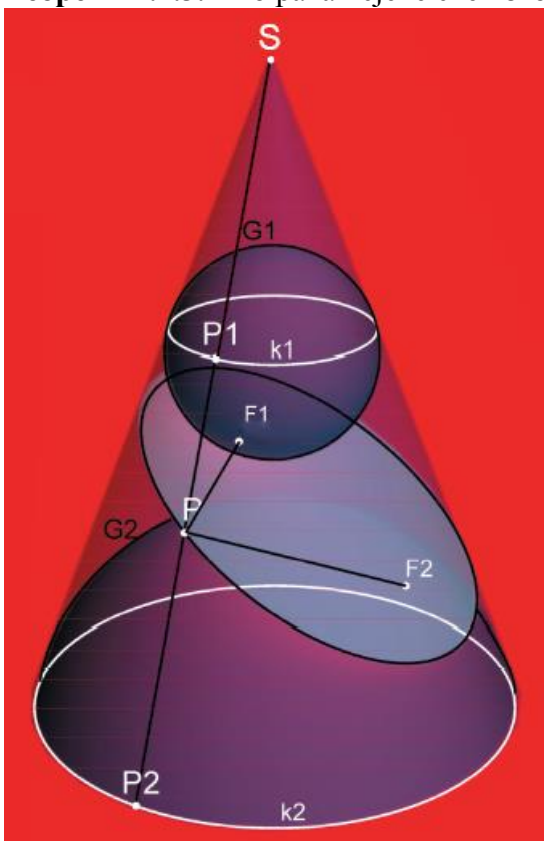
Хипербола је геометријско мјесто тачака (P) у равни чија је разлика удаљености од двије фиксне тачке (F_1 и F_2) константна:

$$PF_1 - PF_2 = \text{const.}$$

Конац је причвршћен у тачкама F_2 и A, а лењир врхом кружи око тачке F_1.♦

Француско-белгијски математичар Г. П. Данделин (1794 – 1847. г.) је пронашао елегантан доказ да је затворени конусни пресјек елипса, полазећи од дефиниције из претходног примјера, да је збир растојања сваке тачке на елипси од двије фиксне тачке у њеној равни константан. Те фиксне тачке називају се фокуси елипсе, а константна удаљеност велика оса елипсе.

Теорем 11.1.3. Ако раван сјече све изводнице конуса (купе), пресјечна крива је елипса.



Доказ: На слици лијево, изнад и испод пресјечне равни у конус са врхом S уписане су сфере G_1 и G_2, које додирују ту раван у тачкама F_1 и F_2. Сфере додирују конус по паралелним кружницама k_1 и k_2. Произвозвољна тачка P конусног пресјека лежи на изводници конуса која пролази тачкама P_1 и P_2 кружница k_1 и k_2.

Како су кружнице k_1 и k_2 паралелне, то растојање P_1P_2 не зависи од избора тачке P.

Са друге стране, тангентни одсјечци PF_1 и P_1P на горњој сфери (G_1) су међусобно једнаки, као и тангентни одсјечци PF_2 и PP_2 на доњој сфери (G_2). Отуда је $PF_1 + PF_2 = P_1P + PP_2 = P_1P_2 = \text{const.}$ ♦

Конусни пресјеци су фигуре у равни (тачка, права, кружница, елипса, парабола и хипербола) и стога су нам нарочито интересантне њихове дводимензионалне дефиниције. На примјер, у аналитичкој геометрији то су **криве другог реда**, које полазе од сљедеће дефиниције конусног пресјека.

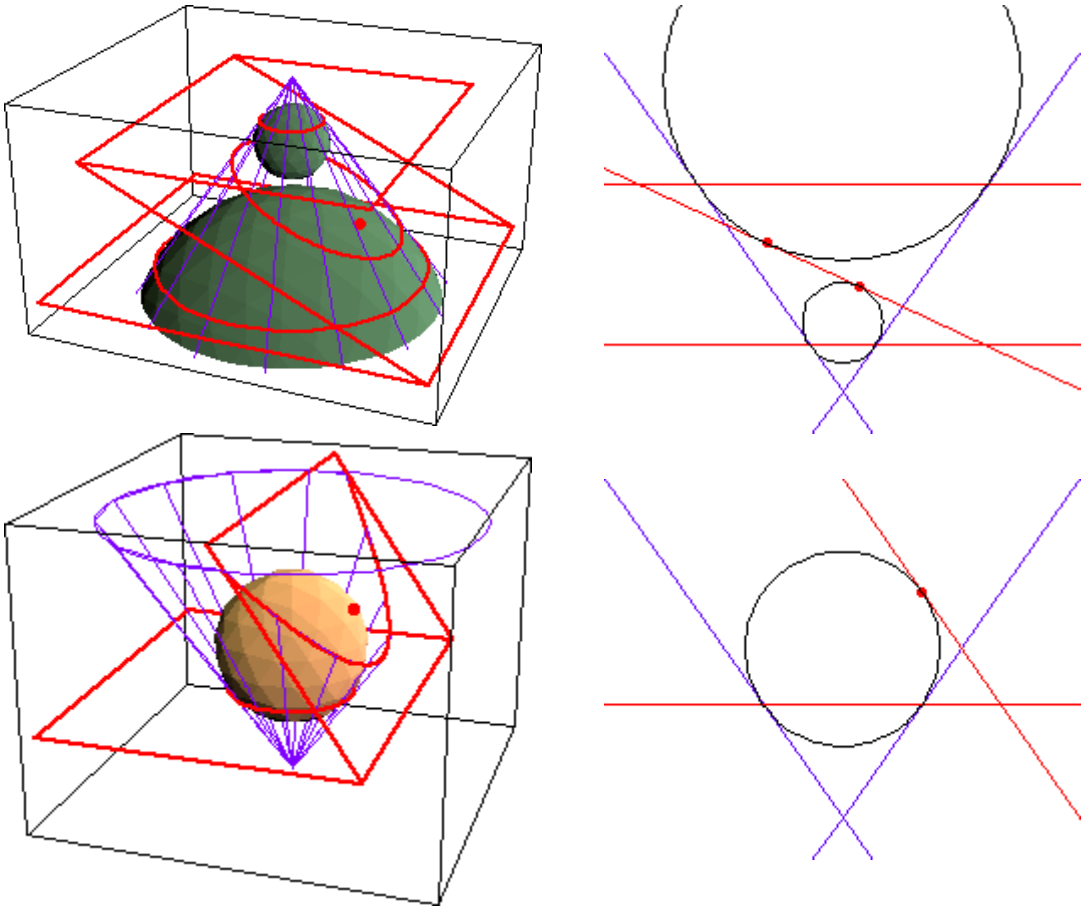
Дефиниција 11.1.4. Дата је раван σ и у њој права d и тачка F. **Конусни пресјек** је геометријско мјесто тачака P у равни σ такво да је количник растојања PF и Pd једнак константном позитивном броју e. Тачку F називамо **фокус** (жижа), праву d **директриса**, а број e **ексцентрицитет** конусног пресјека. Када је $0 < e < 1$ имамо

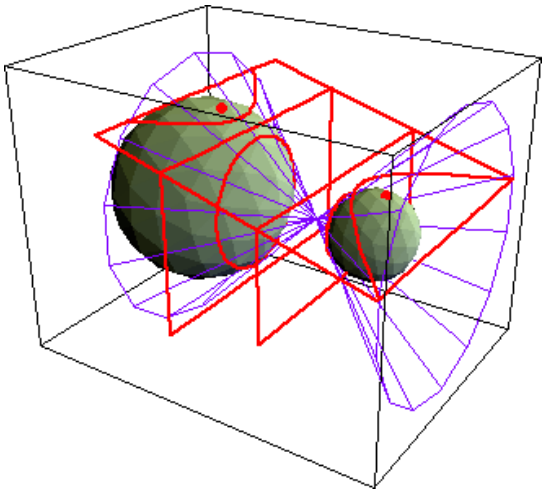
елипсу (гр. *Ἔλλειψις* – недостатак), када је $e = 1$ имамо **параболу** (гр. *παραβολή* - једнакост), када је $e > 1$ имамо **хиперболу** (гр. *ὑπερβολή* – вишак).

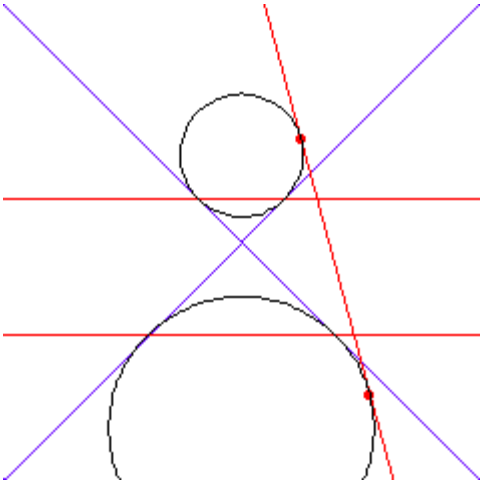
Показаћемо да наведена дефиниција (10.1.3.) заиста одређују исте криве из претходних примјера, на начин који је поопштење Данделинове идеје (Xah Lee Web, http://xahlee.org/).

Теорем 11.1.5.

1. Сфера је уписана у конус тако да додирује и пресјечну раван. Раван тангира сферу у тачки, а конус дуж кружнице. У случају елипсе и хиперболе постоје двије такве сфере.
2. Тачка додира сфере и равни је фокус конусног пресјека.
3. Директриса конусног пресјека је права по којој се сјеку пресјечна раван и раван којој припада тангентна кружница.







Доказ: Показаћемо да (в. претходне слике) пресјек правог кружног конуса и равни има тражену особину количника растојања $|PF| = e \cdot |Pd|$, гдје P произвољна тачка на конусном пресјеку, F је фокус, d је директриса, а e је позитивна константа.

1. Тачка P је произвољна тачка пресјека датог конуса и равни σ. Уписана сфера тангира конус по кружници k и додирује пресјечну раван у тачки F. Одговарајућа директриса је права d по којој се сјеку раван кружнице k и пресјечна раван σ.
2. Права кроз тачку P која је паралелна оси конуса сјече раван кружнице k у тачки Q.
3. Пресјек изводнице кроз тачку P и кружнице k је тачка A.
4. Одсјечак PD је нормала (окомица) из тачке P у тачку D на директриси d.

Тангентни одсјечци PA и PF на сферу из исте тачке P су једнаки, тј. $PA = PF$.
Из троугла PQA добијамо $PQ = PA \cdot \cos\alpha$.
Из троугла PQD добијамо $PQ = PD \cdot \cos\theta$.
Из претходне три једнакости слиједи $PA \cdot \cos\alpha = PD \cdot \cos\theta$,
$PF \cdot \cos\alpha = PD \cdot \cos\theta$, те $PF = \dfrac{\cos\theta}{\cos\alpha} \cdot PD$.♦

Задаци 11.1.6.

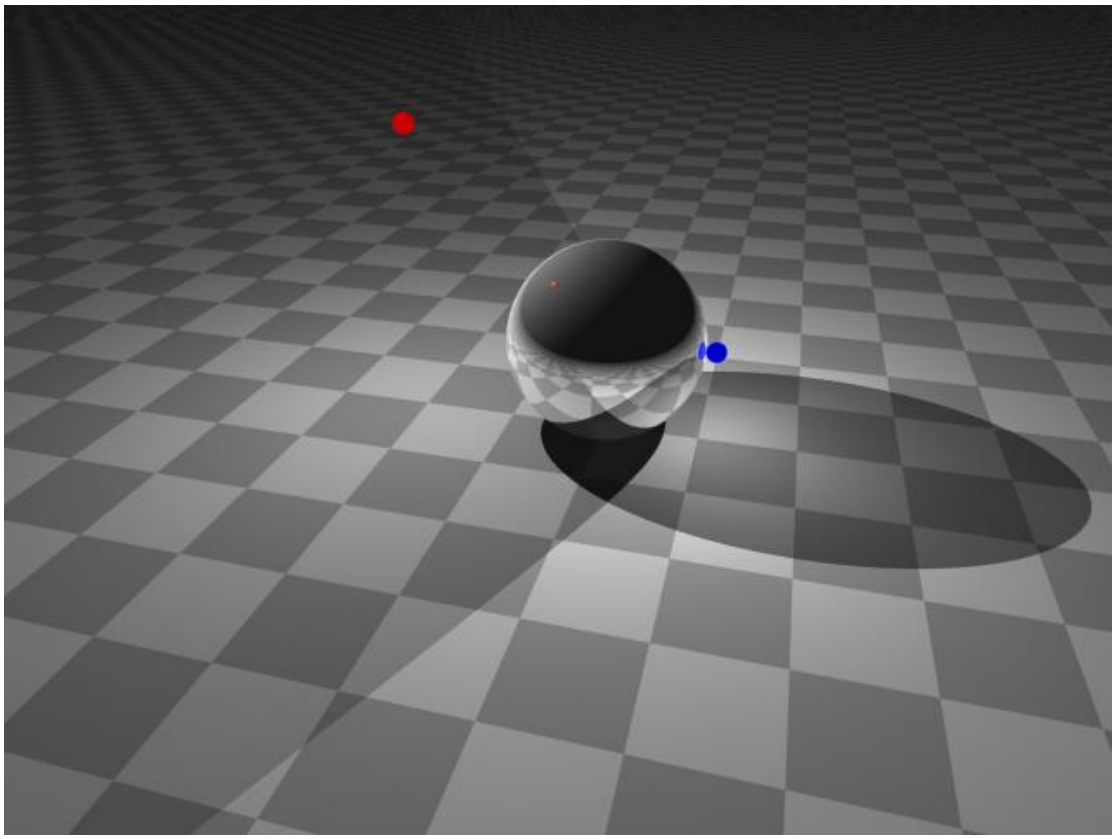
1. Провјерити претходни теорем (10.1.3.) за случај елипсе.

2. Провјерити претходни теорем (10.1.3.) за случај параболе.

3. Провјерити претходни теорем (10.1.3.) за случај хиперболе.

4. Какве фигуре образује свјетлост батеријске лампе на равном зиду?

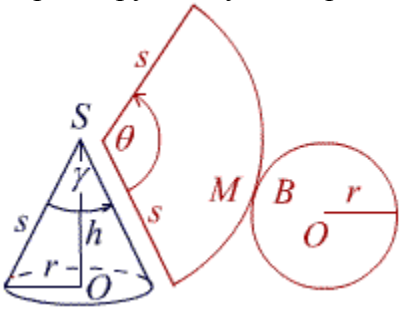
5. Какве фигуре образује сјенка лопте на поду, под тачкастим извором свјетлости?



[Црвена тачка изнад лопте прави сјенку елипсе, плаво свјетло ниже прави сјенку хиперболе. Фокуси обе криве су на мјесту гдје лопта додирује под. Криве имају и исте осе, па су ортогоналне.]

11.2. Површина купе

Права кружна купа је ограничена једним кругом (основа) и дијелом конуса (омотач) са тјеменом изнад центра основе. Под називом „купа“ подразумјева се „права кружна купа“. Према ознакама на сљедећој слици,



површина омотача купе је $M = rs\pi$,
површина основе је $B = r^2\pi$,
збир ових је површина купе $P = r\pi(r + s)$.

Изводница купе, њена висина и полупреччник основе су у релацији $s^2 = h^2 + r^2$.

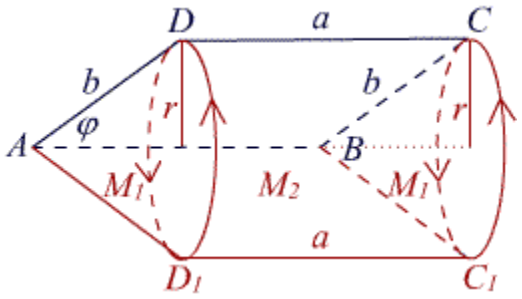
Угао (γ) у тјемену (S) купе, тј. угао при врху осног пресјека и централни угао (θ) омотача, када су у радијанима су у релацији $\theta = 2\pi \sin\frac{\gamma}{2}$.

Примјер 11.2.1. Наћи површину купе висине H, ако је њен омотач кружни исјечак са централним углом 180°.

Рјешење: У радијанима, централни угао $\theta = \pi$, па из $\sin\frac{\gamma}{2} = \frac{1}{2}$ имамо $\gamma = \frac{\pi}{3}$. Угао између изводнице и висине је $\frac{\pi}{6}$, тј. 30°. Даље, $s = \frac{2H\sqrt{3}}{3}$ и $r = \frac{H\sqrt{3}}{3}$, па је $P = H^2\pi$.♦

Примјер 11.2.2. Паралелограм страница a и b које су под углом φ ротира око странице a. Наћи површину насталог тијела.

Рјешење: Паралелограм $ABCD$ страница $AB = a$ и $AD = b$ између којих је угао $BAD = \varphi$ ротира око странице AB. Тачке D и C описују кружнице полупречника r преко тачака D_1 и C_1. Добијено тијело се састоји од два омотача M_1 купа и једног омотача ваљка M_2.



Из $M_1 = rb\pi$ и $M_2 = 2ra\pi$ где је b изводница, a је висина ваљка и због $r = b\cdot\sin\varphi$ налазимо $P_a = 2\pi a(a + b)\sin\varphi$.♦

Задаци 11.2.3.

1. Кружни исјечак са централним углом 100° савије се у омотач купе. Наћи угао при врху осног пресјека.

[≈32°]

2. Висина праве купе је H. Наћи површину купе, ако је њен омотач у развијеном облику кружни исјечак са централним углом 120°.

$[\frac{\pi H^2}{2}]$

3. Израчунати површину купе ако је њена изводница за 1 центиметар дужа од висине, а полупречник основе је ½ дециметра.

$[90\pi$ cm$]$

4. Осни пресјек купе је једнакокраки троугао чији је угао на основици α: Висина купе је H. Колика је површина купе?

$[\frac{H^2\pi}{1-\cos\alpha}]$

5. Троугао страница $a = 10$, $b = 17$ и $c = 21$ центиметар ротира око:
a. прве; ***b.*** друге; ***c.*** треће странице. Наћи површину насталог тијела.

$[M_a = \frac{2P_\Delta(b+c)}{a}\cdot\pi = 2553{,}6\cdot\pi;\ M_b = 1225{,}4\cdot\pi;\ M_c = 864\cdot\pi$ cm$]$

6. Правоугли трапез основица 11 cm и 3 cm и површине 105 cm ротира око једне па око друге основице. Колику површину имају добијена тијела?

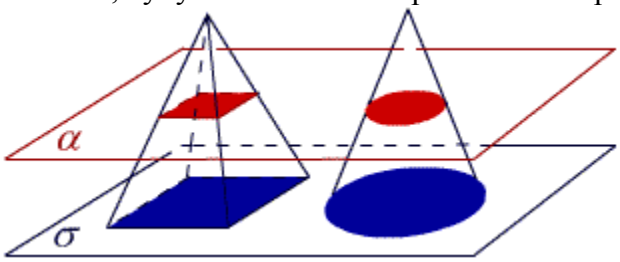
$[570\pi;\ 397{,}8$ cm$^2]$

7. Прави кружни ваљак је уписан па издубљен из праве купе. Висине купе и ваљка су 24 cm и 18 cm, а полупречник основе купе је 7 cm. Наћи површину преосталог тијела.

$[344{,}9\pi\,\mathrm{cm}^2]$

11.3. Запремина купе

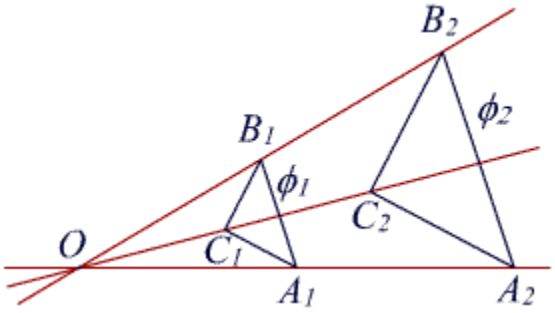
Уопште, купу можемо посматрати и као пирамиду са кружном основом.



На слици лијево, правилна 4-страна пирамида и купа једнаких висина имају основе у равни σ. Површине основа су им једнаке. Произвољна раван α паралелна са основама ($\alpha \parallel \sigma$) сијече пирамиду и купу по фигурама које су сличне квадрату, односно кругу основа. На основу хомотетије знамо да те фигуре такође имају једнаке површине. Даље, на основу Кавальеровог принципа (5.3.) знамо да су запремине ових тијела једнаке.

Хомотетија, подсјећамо се, је пресликавање тачака, фигуре ϕ_1 у ϕ_2 тако да за одабрану тачку O и број k вриједи релација дужина

$$(\forall X_1 \in \phi_1)\ (\exists X_2 \in \phi_2)\ OX_2 = k \cdot OX_1.$$



Дата тачка O назива се центар хомотетије, а реалан број k коефицијент хомотетије.

Хомотетијом се права пресликава у себи паралелну праву. Произвољна дуж A_1B_1 пресликава се у дуж A_2B_2 тако да је $A_2B_2 = k \cdot A_1B_1$. Угао се пресликава у подударан угао.

Запремина купе једанка је запремини пирамиде која са купом има једнаку површину базе и једнаку висину, тј.

$$V = \frac{1}{3}BH\ .$$

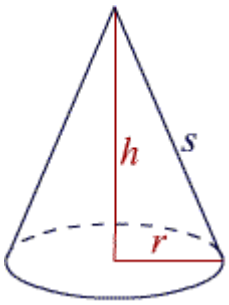
Примјетимо да хомотетија и Кавальеров принцип и према томе и претходна формула за запремину купе једнако важе и ако је на претходној слици коса купа исте површине основе и једнаке висине. Такође, запремина је остаје иста и када је у основи елипса, или неки овал исте површине. Међутим, ако је у основи купе круг полупречника r можемо писати:

$$V = \frac{1}{3}r^2\pi \cdot H\ ,$$

гдје је H висина (удаљеност врха од равни основе) купе.

Примјер 11.3.1. Површина купе је $384\pi\,\text{cm}^2$, а изводница 20 cm. Колика је запремина купе?

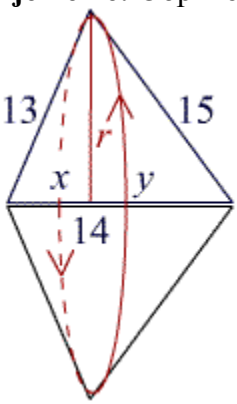
Рјешење: Површина купе је $384\pi = r\pi\cdot(r+s)$, гдје је s изводница. Отуда је $r^2 + 20r - 384 = 0$. Рјешавањем ове квадратне једначине добијамо једино прихваљиво рјешење $r = 12$ cm. Из правоуглог троугла на слици десно $s^2 = h^2 + r^2$, слиједи $h = 16$ cm. Тражена запремина купе је



$$V = \frac{1}{3}12^2\pi\cdot 16\,\text{cm}^3 = 768\ \text{cm}^3.\blacklozenge$$

Примјер 11.3.2. Троугао страница 13, 14 и 15 центиметра ротира око средње по величини странице. Израчунати површину и запремину обртног тијела.

Рјешење: Обртно тијело се састоји од двије купе изводница 13 и 15 центиметара, спојених основа. Полупречник круга основе r је висина на страницу 14 cm датог троугла. Збир висина тих купа такође је 14 cm.

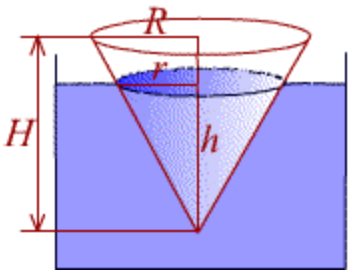


Површина је збир омотача двије купе $P = r\cdot 13\pi + r\cdot 15\pi = r\cdot 28\pi$. Запремина је $V = \frac{1}{3}r^2\pi\cdot x + \frac{1}{3}r^2\pi\cdot y = \frac{1}{3}r^2\pi\cdot(x+y) = \frac{1}{3}r^2\pi\cdot 14$.

Да бисмо пронашли висину троугла (r) користимо Херонов образац за површину $P_\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, гдје је s = 21 полуобим троугла. Добијамо, $P_\Delta = 84\ \text{cm}^2$, па имамо $\frac{14r}{2} = P_\Delta$, тј. $r = 12$ cm. Коначно је $P = 336\pi\,\text{cm}^2$ и $V = 672\pi\,\text{cm}^3$.♦

Примјер 11.3.3. Купа висине $H = 10$ центиметара од храстовине густине $\rho = 0{,}77$ грама по кубном центиметру плива на води. Израчунати колико ће купа заронити у случају да плива врхом према доле.

Рјешење: Густина воде је $\rho_0 = 1$ грам по центиметру кубном, што значи да купа плива истискујући тачно онолику масу воде колика је маса купе. Запремина купе је $V = \frac{1}{3}R^2\pi H$, њена маса је $m = \rho V = \frac{\rho}{3}R^2\pi H$ (грама). Исту масу имаће



водена купа запремине $V_0 = \frac{1}{3}r^2\pi h$. Отуда добијамо $\rho_0 r^2 h = \rho R^2 H$. Са друге стране, из пропорције $r : h = R : H$ (в. слику лијево) слиједи $r = \frac{h}{H}R$, па из претходне једнакости добијамо $h = H\sqrt[3]{\rho} \approx 9{,}17$ центиметара.♦

Задаци 11.3.4.

1. Полупречник основе праве купе је r, а централни угао развијеног омотача износи θ радијана. Колика је запремина купе?

$$\left[\frac{r^3\pi}{3}\sqrt{\frac{4\pi^2}{\theta^2}-1}\right]$$

2. Изводница купе дужине s образује са равни основе угао 60°. Колика је запремина купе?

$$\left[\frac{s^3\pi\sqrt{3}}{24}\right]$$

3. Троугао страница a, b, c ротира око сваке странице. Одредити однос запремина добијених тијела.

$$\left[\frac{1}{a}:\frac{1}{b}:\frac{1}{c}\right]$$

4. Једнакокраки трапез основица 7 cm и 5 cm и крака дужине 2 cm ротира око дуже, односно краће основице. Наћи запремине насталих тијела.

$[17\pi \text{ cm}^3, 21\pi \text{ cm}^3]$

5. У правилан тетраедар уписана је купа и око њега је описана купа. Наћи однос запремина купа.

[1 : 4]

6. Осни пресјек купе, полупречника основе r је правоугли троугао. У купу је уписан равнострани ваљак. Наћи однос запремина купе и ваљка.

[9 : 2]

7. Купа плива у уљу густине $\rho_0 = 0{,}89$ g/cm^3 врхом према доле. Колика је густина материјала од које је купа сачињена, ако је она потонула 90% своје висине?

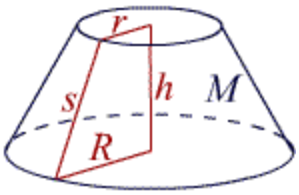
[0,65 g/cm^3]

8. Купа висине H од дрвета густине ρ (мање од воде) плива на води са врхом према горе. Колико је купа заронила?

$$\left[H\left(1-\sqrt[3]{1-\rho}\right)\right]$$

12. Зарубљена купа

Зарубљена купа је дио праве кружне купе између основе и равнине паралелне основи чија удаљеност од основе је мања од висине купе.



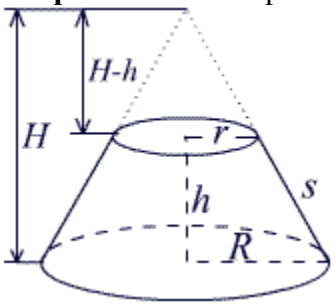
На слици лијево имамо зарубљену купу и ознаке:
h – висина зарубљене купе,
R, r – полупречници основа,
s – изводница и
M – омотач.

Дужина изводнице је $s = \sqrt{h^2 + (R-r)^2}$,
површина омотача је $M = s\pi(R + r)$,
укупна површина зарубљене купе је $P = \pi R^2 + \pi r^2 + s\pi(R + r)$, и
запремина зарубљене купе је $V = \frac{1}{3}\pi(R^2 + Rr + r^2)h$.

12.1. Површина зарубљене купе

Површину зарубљене купе је могуће извести из формуле за површину купе.

Теорем 12.1.1. Површина зарубљене купе са ознакама на слици је:



$$P = \pi R^2 + \pi r^2 + s\pi(R + r).$$

Доказ: Допуна зарубљене купе до праве купе је приказана на слици лијево. Нека је S изводница купе, s је изводница зарубљене купе. Слично, H је висина купе, h је висина зарубљене купе. Такође, R је полупречник основе купе, док је r полупречник горње основе зарубљене купе, односно полупречник основе допуњене купе чија је висина $H – h$, а изводница $S – s$.

Прије свега, из сличности правоуглих троуглова са хипотенузама S и s имамо пропорцију $(R – r) : R = s : S$.

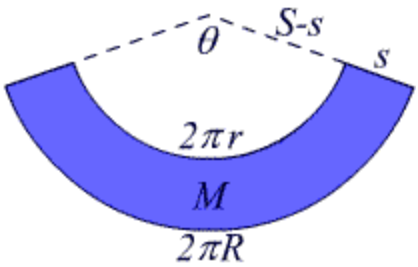
Површина омотача зарубљене купе је разлика површина омотача веће и мање купе $M = RS\pi – r(S – s)\pi$, те смјеном из претходне пропорције $M = s\pi(R + r)$.

Даље, површине основа зарубљене купе су $R^2\pi$ и $r^2\pi$, па је укупна површина зарубљене купе збир површине омотача и основа, тј.

$$P = \pi R^2 + \pi r^2 + s\pi(R + r).\blacklozenge$$

Примјер 12.1.2. Представити омотач зарубљене купе развијен у равни. Показати да је површина омотача $M = s\pi(R + r)$.

Рјешење: Омотач зарубљене купе изрезан дуж изводнице и развијен у равни



представља исјечак концентричних кругова. На слици лијево су концентрични кругови, већег полупречника S и мањег $S - s$ са централним углом θ, рецимо у радијанима, и луковима дужина $S\theta = 2\pi R$ и $(S - s)\theta = 2\pi r$. Отуда $S = \frac{2\pi R}{\theta}$ и $S - s = \frac{2\pi r}{\theta}$, затим $s = \frac{2\pi(R-r)}{\theta}$.

Како је површина шрафираног, дијела између кружница једнака разлици површина кругова датог исјечка биће $M = \frac{1}{2}S^2\theta - \frac{1}{2}(S-s)^2\theta$. Отуда $M = \frac{2\pi^2(R-r)}{\theta}(R+r)$, затим $M = s\pi(R + r)$. Дакле, добијамо исти резултат као у доказу претходне теореме (11.1.1.).♦

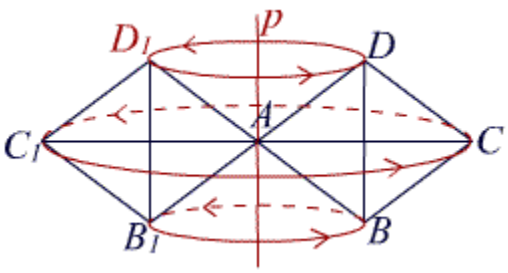
Примјер 12.1.3. Колика је грешка када запремину зарубљене купе (R, r, h) замјенимо запремином ваљка исте висине и полупречника основе који је једнак аритметичкој средини купиних? Посебно, колика је грешка ове приближне замјене, ако зарубљена купа има димензије (7, 5, 6)?

Рјешење: Тачна запремина купе је $V = \frac{h\pi}{3}(R^2 + Rr + r^2)$. Тачна запремина поменутог ваљка је $V_v = \frac{h(R+r)^2\pi}{4}$. Разлика резултата $\Delta V = V - V_v$, овдје $\Delta V = \frac{h\pi}{12}(R-r)^2$ је тзв. **апсолутна грешка** приближног рачунања. **Релативна грешка** је количник апсолутне грешке и приближне вриједности $\delta V = \frac{\Delta V}{V_v}$.

Посебно, тачна вриједност је $V = 218\pi$, приближна $V_v = 216\pi$. Апсолутна грешка $\Delta V = 2\pi$, а релативна $\delta V = \frac{2\pi}{216\pi}$ = 0,009259… , тј. мања је од 1%. ♦

Примјер 12.1.4. Ромб са дијагоналама d_1 = 15 cm, d_2 = 8 cm обрће се око осе која пролази кроз тјеме ромба паралелно с другом дијагоналом. Наћи површину и запремину насталог ротационог тијела.

Рјешење: Ромб $ABCD$ је четвороугао у равни који има све четири стране једнаке. Такође, то је четвороугао чије се дијагонале $AC = d_1$ и $BD = d_2$ полове под правим углом. На слици лијево, дати ромб се обрће око праве p која садржи тачку A и паралелна је дијагонали BD. Ротацијом настаје тијело које се састоји од двије зарубљене купе полупречника основа AC и $AC/2$, издубљене двијема



купама основа дужине $AC/2$. Површина насталог тијела једнака је збиру два омотача зарубљених купа плус два омотача купа, тј. $P = 2\cdot\pi(AC + AC/2)\cdot CD + 2\cdot\pi(AC/2)\cdot CD = 4\pi\cdot AC\cdot CD = 2\pi\cdot d_1\cdot\sqrt{d_1^2 + d_2^2}$. Запремина насталог тијела једнака је збиру зпремнина двије зарубљене купе минус двије запремине купа, тј. $V = 2\cdot(1/3)\pi(AC^2 + AC\cdot(AC/2) + (AC/2)^2)\cdot(BD/2) - 2\cdot(AC/2)^2\pi\cdot(BD/2) = \frac{\pi}{2}d_1^2 d_2$. Посебно, $P = 510\pi\,\text{cm}^2$ и $V = 900\pi\,\text{cm}^3$.♦

Задаци 12.1.5.

1. У једнакокраки трапез нагиба кракова према већој основици α уписана је кружница полупречника r. Трапез ротира око праве која садржи средишта основица трапеза. Наћи површину тако добијене зарубљене купе.

$$[2\pi\cdot r^2\left(\frac{4}{\sin^2\alpha} - 1\right)]$$

2. Једнакокраки троугао обима $p = 24$ cm, основице $a = 10$ cm ротира око осе која је окомита на основицу и садржи једно њено тјеме. Наћи површину добијеног тијела.

$$[240\pi\,\text{cm}^2]$$

3. Оса ротације једнакостраничног троугла странице a је паралелна висини и удаљена од висине за a. Наћи површину добијеног тијела.

$$[6a^2\pi]$$

4. Како се односе површине купе $R = 25$, $r = 15$, $s = 10$ и њене допунске купе?

$$[25 : 9]$$

5. Купа полупречника основе R и висине H пресјечена је равнином паралелном основи на другој трећини висине рачунајући од основе. Наћи однос површине омотача добијених дијелова.

$$[4 : 1]$$

6. Површина осног пресјека зарубљене купе је $P_0 = 15\ \text{cm}^2$, а полупречници основа су $R = 7$ cm и $r = 3$ cm. Колика је површина те купе?

$$[108\pi\,\text{cm}^2]$$

12.2. Запремина зарубљене купе

Када са равни паралелном основи одсјечете врх купе добијате зарубљену купу, коју још називамо и крња, или одсјечена купа.

Став 12.2.1. Ако су површине основа зарубљене купе једнаке B_1 и B_2, а дужина висине h, онда је запремина те купе

$$V = \frac{h}{3}\cdot\left(B_1 + \sqrt{B_1 B_2} + B_2\right).$$

Доказ је идентичан доказу става 7.3.1.♦

Примјер 12.2.2. Извешћемо доказ познате формуле $V = \frac{1}{3} r^2 h$ (r и h су полупречник основе и висина купе) за запремину праве купе не позивајући се на Кавањеров принцип.

Рјешење: Изрежимо дату купу на n дијелова ($n \in \boldsymbol{N}$) помоћу $n - 1$ равни међусобно једнако удаљених и паралелних основи. Произвољан k-ти такав дио (k = 1, 2, …, n) је зарубљена купа висине $\frac{h}{n}$, полупречника веће основе $r \cdot \frac{k}{n}$ и полупречника мање основе $r \cdot \frac{k-1}{n}$. На слици лијево приказана је таква једна k-та кришка висине $AH = \frac{h}{n}$, пречника веће основе $AD = 2r\frac{k}{n}$ и пречника мање основе $GF = 2r\frac{k-1}{n}$. Запремина ове кришке V_k је мања од запремине ваљка исте висине пречника основе AD и већа је од ваљка исте висине пречника основе GF. Другим ријечима за свако k имамо неједнакости

$$\pi \cdot \left(r\frac{k-1}{n} \right)^2 \cdot \frac{k}{n} < V_k < \pi \cdot \left(r\frac{k}{n} \right)^2 \cdot \frac{k}{n}, \text{ односно}$$

$$(k-1)^2 < V_k \cdot \frac{n^3}{\pi \cdot r^2 h} < k^2.$$

Саберимо све ове неједнакости за k = 1, 2, …, n и добићемо неједнакости

$$0^2 + 1^2 + ... + (n-1)^2 < V \cdot \frac{n^3}{\pi \cdot r^2 h} < 1^2 + 2^2 + ... + n^2,$$

где је $V = V_1 + V_2 + … + V_n$ запремина дате купе. Користећи формуле за збир квадрата првих $n - 1$ и n природних бројева имамо

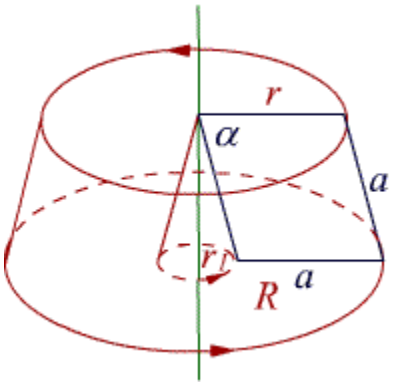
$$\frac{(n-1)n(2n-1)}{6} < V \cdot \frac{n^3}{\pi \cdot r^2 h} < \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Подјелимо ове везане неједнакости са n^3 и након мало сређивања добићемо

$$\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{2n}\right)}{3} < \frac{V}{\pi \cdot r^2 h} < \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{2n}\right)}{3}.$$

Обе неједнакости морају бити тачне за сваки, ма како велики био број n. Када број n расте, тада и лијева и десна страна неједнакости постају све више једнаке броју 1/3. Према томе, када број n расте добијамо да је све тачнија једнакост $\frac{V}{\pi \cdot r^2 h} = \frac{1}{3}$, тј. $V = \frac{\pi}{3} r^2 h$.♦

Примјер 12.2.3. Ромб странице a = 5 центиметара са оштрим углом између страница α = 60° ротира око осе нормалне на страницу у тјемену тог угла. Наћи површину и запремину насталог ротационог тијела.



Рјешење: Ротацијом ромба настаје зарубљена купа из које је издубљена обична купа. Полупречник основе обичне купе је $r_1 = a\cos\alpha$. Већа и мања, на слици горња и доња основа зарубљене купе имају полупречнике $R = r_1 + a$ и $r = a$. Површине омотача купе и зарубљене купе су $M_1 = a^2\pi\cos\alpha$ и $M = a^2\pi(2+\cos\alpha)$. Површина насталог тијела је

$$P = R^2\pi - r_1^2\pi + r^2\pi + M + M_1, \text{ тј.}$$

$P = 4a^2\pi(1+\cos\alpha)$. Посебно $P = 150\pi\ \text{cm}^2 \approx 471\ \text{cm}^2$. Висина купе је $H = a\sin\alpha$. Запремина добијеног тијела састоји се од запремине зарубљене купе минус запремине обичне купе, тј. $V = \frac{H}{3}(R^2\pi + Rr\pi + r^2\pi) - \frac{H}{3}r_1^2\pi$. Дакле, $V = a^3\pi\sin\alpha\cos^2\alpha$. Посебно $V = \frac{125}{8}\pi\sqrt{3}\ \text{cm}^3 \approx 85\ \text{cm}^3$. ♦

Задаци 12.2.4.

1. Пречници дна и отвора кофе су 20 и 30 центиметара. Дубина кофе је 24 cm. Кофа је напуњена снијегом густине 125 kg/m^3. Колика је маса снијега?

[1,49 kg]

2. Бетонска стопа је облика зарубљене купе пречника основа 12 и 8 дециметара. Висина стопе је 6 dm. Густина бетона је 2100 kg/m^3. Колика је маса стопе?

[4011 kg]

3. Полупречници основа и изводница праве зарубљене купе односе се као 1:5:5. Запремина зарубљене купе је 31π. Колика је висина купе?

[3]

4. Полупречници основа и изводница праве зарубљене купе односе се као 1:4:5. Висина купе је 12. Колика је запремина купе?

[252π]

5. У праву зарубљену купу полупречника основа и висине $R = 4$, $r = 2$ и $H = 3$, уписана је права зарубљена шестострана пирамида. Колика је запремина призме?

[$84\sqrt{3}$]

6. Око праве зарубљене купе полупречника основа и висине $R = 5$, $r = 4$ и $H = 3$, описана је права зарубљена петострана призма. Колика је запремина призме?

[305·tg 36°]

7. Правоугли трапез основица и висине $a = 5$, $b = 2$ и $h = 4$, ротира око мањег крака. Наћи површину и запремину насталог тијела.

[$P = 64\pi$, $V = 52\pi$]

8. Ромб дијагонала $d_1 = 10$ и $d_2 = 24$ cm ротира око висине која пролази пресјеком дијагонала. Наћи запремину насталог тијела.

[≈ 722,3 cm^3]

13. Лопта

Сфера је геометријско мјесто тачака у простору удаљених за константну вриједност R коју називамо полупречник сфере, од једне фиксне тачке коју називамо центар сфере. Унутрашњост сфере је кугла (лопта).

Површина сфере једнака је површини четири круга истог полупречника, тј.

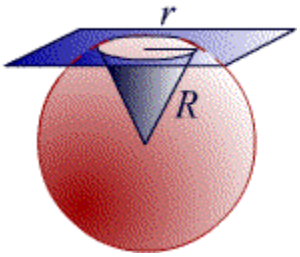
$$P = 4R^2\pi,$$

гдје је R полупречник сфере.

Лопта је геометријско тијело ограничено сфером. Лопту можемо добити обртањем круга око свог пречника. Сваки пресјек лопте и равни је круг.

Запремина лопте је $V = \frac{4}{3}R^3\pi$.

Лоптин одсјечак је геометријско тијело добијено одсјецањем дјела лопте равни.



На слици лијево, лопта полупречника R је пресјечена горе са равни. Пресјек је круг полупречника r. Дио лопте изнад пресјека је лоптин одсјечак, висине h и запремине

$$V = \frac{h^2\pi}{3}(3R - h).$$

Калота је (горња) површина лоптиног одсјечка, која не садржи кружну основу. Површина калоте је

$$P = 2Rh\pi,$$

гдје су R полупречник лопте и h висина калоте.

Лоптин исјечак је геометријско тијело које се може дефинисати помоћу лоптинног одсјечка и купе, чија база је основа лоптиног одсјечка а врх је у центру лопте. Ако је лоптин одсјечак мањи од полулопте, као на претходној слици, онда се лоптин одсјечак допуњује купом са врхом у центру лопте, а основа јој се поклапа са основом одсјечка. Ако је одсјечак већи од полулопте, тада се поменута купа одузима од одсјечка.

Запремина лоптиног исјечка је

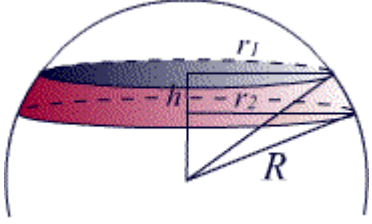
$$V = \frac{2}{3}R^2h\pi,$$

гдје је R полупречник лопте, h је висина калоте.

Зона лопте, односно сфере је дио површине лопте између двије паралелне равни, које пресјецају лопту. Површина зоне је

$$V = 2Rh\pi,$$

гдје је R полупречник лопте, h је висина зоне.



Слој лопте је дио лопте између двије паралелне равни које пресјецају лопту, омеђен зоном лопте и

два круга, пресјека лопте и равни, који на датој слици имају полупречнике r_1 и r_2. Запремина слоја лопте је

$$V = \frac{h\pi}{6}(3r_1^2 + 3r_2^2 + h^2),$$

гдје су h висина слоја, r_1 и r_2 полупречници кругова, основа слоја.

13.1. Површина лопте

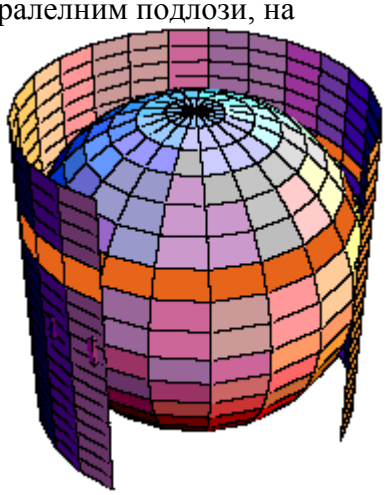
Рекли смо да је површина лопте (сфере) полупречника R једнака

$$P_l = 4R^2\pi,$$

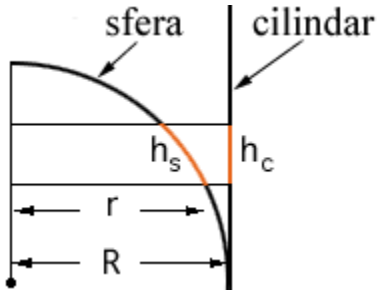
гдје је ирационални број $\pi \approx 3{,}14159$. Како то доказати средњошколцима?

Примјер 12.1.1. Упишимо лопту у ваљак, тј. поставимо сферу (лопту) полупречника R у цилиндар (ваљак) истог полупречника, тако да се они тек додирују по екватору (обима $2R\pi$) и да је висина цилиндра једнака висини лопте ($2R$). Површина цилиндра (омотач ваљка) је $P_c = 2R\pi \cdot 2R$. Покажимо да није случајно што је ова површина једнака површини сфере.

Рјешење: Сферу и цилиндар пресјецимо равнима паралелним подлози, на међусобно једнаким растојањима, као на слици десно. Из сфере и цилиндра издвојимо по једну танку хоризонталну траку на истој висини, на слици обојену наранџасто.

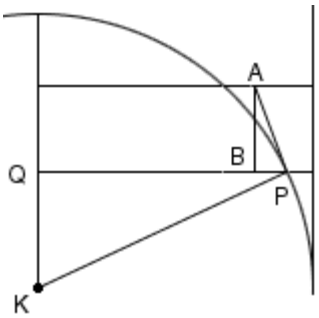


Када би траке биле узете са екватора и када бисмо замишљали да је дебљина појединог слоја све мања и мања, добијали бисмо све тачније подударање њихових површина, до тачно једнаких у случају бесконачно мале ширине. Такође, јасно је да су површине свих трака са цилиндра једнаке, а сада ћемо показати да су и површине свих трака узетих са сфере такође међусобно једнаке.



На дијаграму лијево, h_c је висина изрезане траке са цилиндра, а h_s је дужина лука изрезане кришке са сфере. Површина наранџастог правоугаоника на цилиндру је $2R\pi \cdot h_c$, а површина искривљеног правоугаоника изрезаног из сфере је $2r\pi \cdot h_s$. Даље, показаћемо да се смањивањем полупречника r, узимањем вишљег слоја са претходне слике не мјења површина траке узете са сфере.

На сљедећем дијаграму десно, K је центар сфере. PA је тангента на сферу у



тачки P, а A је окомито на QP у тачки B. Угао APK је прав. Троугао KPQ је правоугли, па је ∠QKP + ∠KPQ = 90°. Такође ∠KPQ + ∠BPA = 90°, тј. ∠QKP = ∠BPA. Другим рјечима, имамо сличне троуглове: ΔQKP ~ ΔBPA. Отуда PQ : KP = AB : PA, при чему је PQ = r, KP = R, AB = h_c и приближно PA = h_s, тј. $r\cdot h_s = R\cdot h_c$. То значи да се смањивањем полупречника r таман толико поврћа дужина лука h_s да површине наранџастих правоугаоника изрезаних из цилиндра и из сфере остају једнаке. ♦

На сличан начин се може разумјети зашто је поменута **површина калоте**

$$P_k = 2R\pi\cdot h,$$

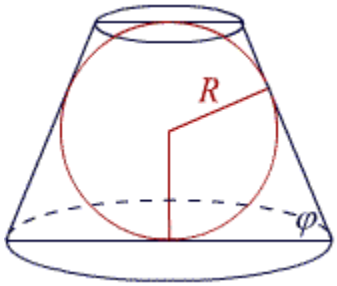
гдје су R полупречник сфере и h висина калоте, односно зашто је **површина зоне**

$$P_z = 2R\pi\cdot h,$$

гдје је h висина зоне.

Примјер 13.1.2. У зарубљену купу уписана је лопта полупречника R. Изводница купе је нагнута према равни основе под углом φ. Наћи запремину зарубљене купе.

Рјешење: Запремина зарубљене купе је $V_k = \frac{H\pi}{3}(r_1^2 + r_1r_2 + r_2^2)$, гдје је H висина зарубљене купе, а r_1 и r_2 су полупречници кругова њене доње и горње основе.



Како је $H = 2R$, $r_1 = R\ \mathrm{ctg}\frac{\varphi}{2}$ и $r_2 = R\ \mathrm{tg}\frac{\varphi}{2}$, то је

$$V_k = \frac{2}{3}R^3(\mathrm{ctg}^2\frac{\varphi}{2} + 1 + \mathrm{tg}^2\frac{\varphi}{2})\pi\,.$$

Задаци 13.1.3.

1. У правилни тетраедар ивице a уписана је и око њега описана лопта. Наћи полупречнике лопти.

$$[r = \frac{a\sqrt{6}}{12},\ R = \frac{a\sqrt{6}}{4}]$$

2. У правилни октаедар ивице a уписана је и око њега је описана лопта. Наћи полупречнике лопти.

$$[r = \frac{a\sqrt{6}}{6},\ R = \frac{a\sqrt{2}}{2}]$$

3. Висина лоптиног исјечка је $h = 2$, а површина његовог омотача односи се према површини калоте као $\lambda = 3{:}2$. Колика је површина исјечка?

$$[h^2(1+\lambda)(1+4\lambda^2)\pi = 100\pi]$$

4. Површина калоте лоптиног исјечка једнака је површини његовог омотача. Који је дио лопте тај исјечак?

[1/5]

5. Лопта површине 400π пресјечена је двјема паралелним равнима удаљеним од центра 6, односно 8. Израчунати површину добивеног слоја.

[40π, 280π]

6. Израчунати дио површине лопте који се види из дате тачке ако је полупречник лопте r = 6 cm а удаљеност центра лопте од дате тачке d = 12 cm.

[36π cm^2]

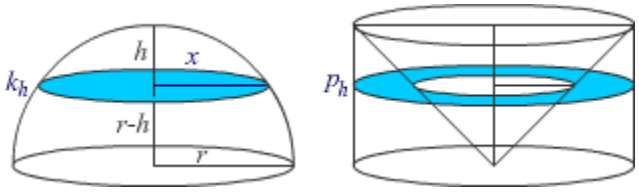
13.2. Запремина лопте

Примјер 13.2.1. Помоћу Кавальеровог принципа показати да је **запремина лопте**

$$V = \frac{4}{3} r^3 \pi ,$$

гдје је r полупречник лопте.

Рјешење: Да би извели формулу за запремину лопте $V = \frac{4}{3} r^3 \pi$, можемо користити Кавальеров принцип (6.3.) и сљедеће фигуре. Лијево је полулопта полупречника r, десно је ваљак истог полупречника базе, из којег је издубљена (изврнута) купа полупречника основе и висине такође r, а које леже на истој равни (σ_1).



Друга раван (σ_2), на висини h од врха полулопте (ваљка) и паралелна првој, сјече полулопту по кругу k_h полупречника x, а према томе и ваљак по прстену p_h полупречника $r - h$ и r. Докажимо да су површине ових пресјека једнаке.

Из полулопте налазимо $x^2 = r^2 - (r-h)^2 = 2rh - h^2$, што значи да површина круга (k_h) износи $P_k = (2rh - h^2)\pi$. Површина прстена (p_h) једнака је разлици површина већег и мањег круга, тј. $P_p = r^2\pi - (r-h)^2\pi = (2rh - h^2)\pi$. Дакле, површине пресјека полулопте и ваљка (са равни σ_2) заиста су међусобно једнаке.

Према томе, на основу Кавальеровог принципа закључујемо да су запремине дате полулопте и (шупљег) ваљка међусобно једнаке. Запремина ваљка је

$$V_v = V_2 - V_1 = r^2\pi \cdot r - \frac{r^2\pi \cdot r}{3} = \frac{2}{3} r^3 \pi .$$

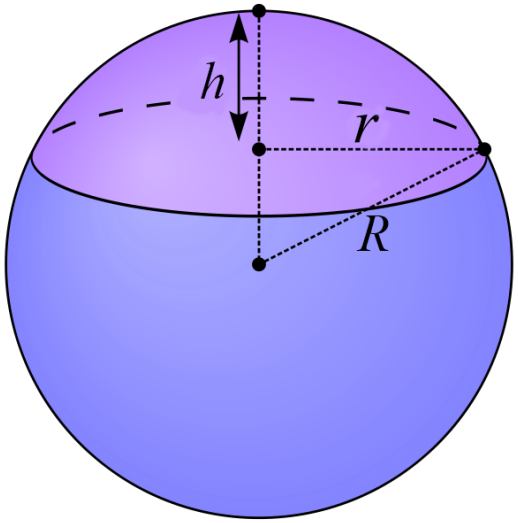
Према томе, запремина (цијеле) лопте је $V = 2V_v$, тј.

$$V = \frac{4}{3} r^3 \pi . \blacklozenge$$

Примјер 13.2.2. Помоћу Кавањеровог принципа показати да је запремина **лоптиног одсјечка** дата формулом

$$V = \frac{h^2\pi}{3}(3R - h).$$

Рјешење: Радимо истим поступком као у претходном примјеру. Наиме, лоптин одсјечак на слици лијево, висине h, гдје је $0 < h < R$, има исту запремину као тијело које се добија када се из ваљка (V_2) висине h и полупречника основе R извади зарубљена купа (V_1) исте висине h чији су полупречници основа R и $R - h$.



Даље, запремина ваљка је

$$V_2 = R^2\pi h,$$

а запремина зарубљене купе

$$V_1 = \frac{h\pi}{3}[R^2 + R(R-h) + (R-h)^2],$$

па је запремина издубљеног ваљка

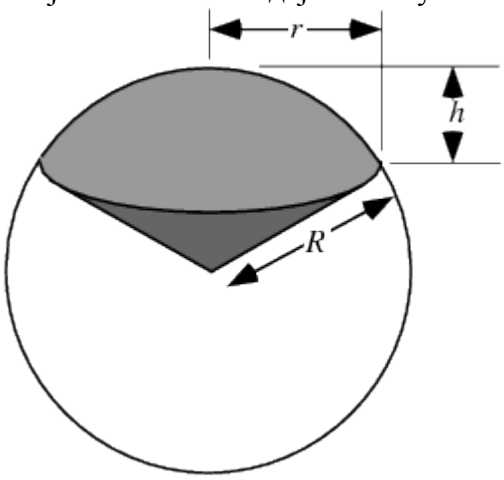
$$V_v = V_2 - V_1 = h^2\pi\left(R - \frac{h}{3}\right). \blacklozenge$$

Примјер 13.2.3. Показати да је запремина **лоптиног исјечка** дата формулом

$$V = \frac{2}{3}R^2 h\pi,$$

гдје је R полупречник лопте, h је висина калоте (висина одсјечка).

Рјешење: Лоптин исјечак је тијело које се добије из лоптиног одсјечка и купе. Ако је лоптин одсјчак мањи од полулопте, као на слици десно, тада се лоптин одсјечак допуњује купом чији је врх у центру лопте, а основа јој се поклапа са основом одсјечка. Ако је одсјечак већи од полулопте, тада се купа одузима од одсјечка.



Нека је R полупречник лопте, h висина одсјечка која одговара посматраном исјечку, при чему је $h < R$. Запремина исјечка је

$$V = V_1 + V_2,$$

гдје су V_1 запремина одсјечка висине h, а V_2 запремина купе. Дакле

$$V_1 = \frac{\pi}{3}h^2(3R - h) \text{ и } V_2 = \frac{\pi}{3}r^2(R - h),$$

гдје је r полупречник базе одсјечка и базе купе, као на претходној слици. Затим

$$r^2 = R^2 - (R-h)^2, \text{ тј. } r^2 = 2Rh - h^2,$$

из чега слиједи

$$V_2 = \frac{\pi}{3}(2Rh - h^2)(R-h) = \frac{\pi}{3}(2R-h)(r-h)h.$$

На крају, за запремину лоптиног исјечка добијамо

$$V = V_1 + V_2 = \frac{\pi}{3}(3Rh - h^2 + 2R^2 - 2Rh - Rh + h^2)h = \frac{2}{3}\pi R^2 h.$$

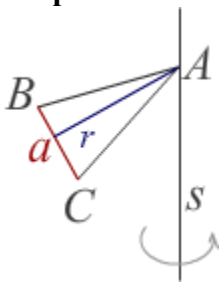
Исти резултат се добије када је $h > R$, а примјени се формула $V = V_1 - V_2$. ♦

Запремину лопте можемо добити и помоћу познатог израза за површину лопте

$$P = 4R^2\pi,$$

користећи сљедећи, иначе познати теорем, који овдје нећемо доказивати.

Теорема 13.2.4. Запремина тијела насталог ротацијом троугла око осе која пролази кроз једно његово тјеме и лежи у равни троугла, а не сјече га, једнака је производу површине добијене ротацијом основе троугла и једне трећине висине троугла на ту основу. ♦



На слици лијево је троугао ΔABC висине r на страницу a који ротира око осе s, која садржи само тјеме A датог троугла.

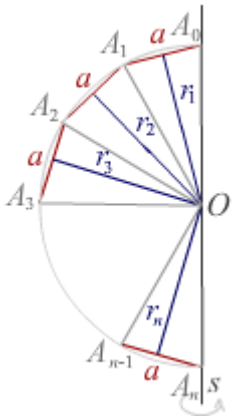
Ротационо тијело које добијемо има запремину

$$V = \frac{r}{3}P_a,$$

где је P_a површина формирана ротацијом странице a.

Примјер 13.2.5. Примјеном претходне теореме (4.) извести запремину лопте.

Рјешење: Обртањем $n \in \mathbf{N}$ једнакокраких троуглова OA_0A_1, OA_1A_2, OA_2A_3, …, $OA_{n-1}A_n$, основице a и међусобно једнаких висина $r_1 = r_2 = r_3 = \ldots = r_n = r$ који чине полигоналну линију као на сљедећој слици, око осе s која лежи у равни троуглова, настаје тијело све сличније лопти полупречника r уколико је n све већи природан број.



Наиме, од појединих троуглова настају тјела запремина

$$V_1 = \frac{r_1}{3}P_1,\ V_2 = \frac{r_2}{3}P_2,\ V_3 = \frac{r_3}{3}P_3,\ \ldots,\ V_n = \frac{r_n}{3}P_n,$$

чији збир запремина је

$$V_1 + V_2 + V_3 + \ldots + V_n =$$

$$= \frac{r}{3}(P_1 + P_2 + P_3 + \ldots + P_n)$$

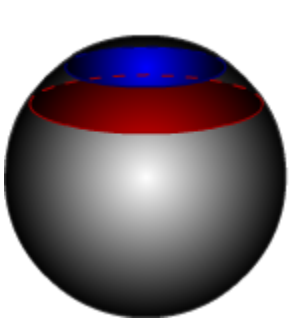
$$\to \frac{r}{3}P_r,$$

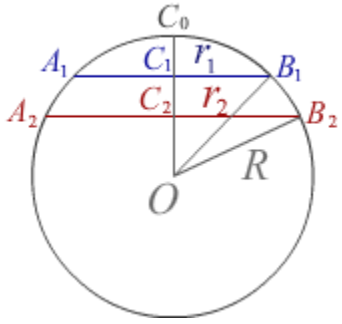
где је $P_r = 4r^2\pi$ површина лопте полупречника r. Према томе

запремина лопте тежи броју $V = \frac{r}{3} \cdot 4r^2\pi = \frac{4}{3} r^3\pi$.♦

Примјер 13.2.6. Двије паралелне равни, једна удаљена 7, а друга 15 cm од центра лопте, сјеку лопту полупречника 25 cm. Израчунати запремину лоптиног слоја.

Рјешење: Постоје два рјешења, зависно од положаја центра лопте у односу на пресјечне равни. На сљедећој слици је случај када обе равни сјеку лопту изнад њеног центра. Десно је вертикални пресјек лопте.





У датом случају $h_1 = C_1C_2 = 15 - 7 = 8$ cm, а из правоуглих троуглова ΔOB_1C_1 и ΔOB_2C_2 налазимо

$$r_1 = \sqrt{25^2 - 15^2} = \sqrt{(25-15)(25+15)} = \sqrt{10 \cdot 40} = \sqrt{4 \cdot 100} = 2 \cdot 10 = 20,$$

$$r_2 = \sqrt{25^2 - 7^2} = \sqrt{18 \cdot 32} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{64} = 3 \cdot 8 = 24.$$

Тражена запремина лоптиног слоја је

$$V_1 = \frac{h\pi}{6}(3r_1^2 + 3r_2^2 + h^2) = \frac{11968\pi}{3}\,\text{cm}^3.$$

У другом случају $h_2 = 15 + 7 = 22$ cm слично налазимо друго рјешење

$$V_2 = \frac{37532\pi}{3}\ \text{cm}^3.\blacklozenge$$

Примјер 13.2.7. Извести формулу за запремина слоја лопте

$$V = \frac{h\pi}{6}(3r_1^2 + 3r_2^2 + h^2),$$

гдје су h висина слоја, r_1 и r_2 полупречници кругова, основа слоја.

Рјешење: Користимо формулу за запремину лоптиног одсјечка (примјер 2.)

$$V = \frac{h^2\pi}{3}(3R - h),$$

и слику претходног примјера (6.). Запремина слоја је разлика запремина два одсјечка

$$V = V_2 - V_1$$

$$= \frac{h_2^2\pi}{3}(3R - h_2) - \frac{h_1^2\pi}{3}(3R - h_1^2)$$

$$= \frac{\pi}{3}[3R(h_2^{\,2} - h_1^{\,2}) - (h_2^{\,3} - h_1^{\,3})]$$

$$= \frac{h\pi}{3}[3R(h_2 + h_1) - (h_2^{\,2} + h_2h_1 + h_1^{\,2})],$$

јер је $h = h_2 - h_1$ висина слоја. Са друге стране, из правоуглих троуглова ΔOB_1C_1 и ΔOB_2C_2 налазимо

$$r_1^{\,2} = R^2 - (R - h_1)^2 = 2Rh_1 - h_1^{\,2} \text{ и } r_2^{\,2} = 2Rh_2 - h_2^{\,2}, \text{ тј.}$$

$$Rh_1 = \frac{r_1^{\,2} + h_1^{\,2}}{2} \text{ и } Rh_2 = \frac{r_2^{\,2} + h_2^{\,2}}{2},$$

што уврштено у претходни израз даје

$$V = \frac{h\pi}{3}\left[3\left(\frac{r_1^{\,2} + h_1^{\,2}}{2} + \frac{r_2^{\,2} + h_2^{\,2}}{2}\right) - (h_2^{\,2} + h_2h_1 + h_1^{\,2})\right]$$

$$= \frac{h\pi}{6}(3r_1^{\,2} + 3r_2^{\,2} + h_2^{\,2} - h_2h_1 + h_1^{\,2})$$

$$= \frac{h\pi}{6}(3r_1^{\,2} + 3r_2^{\,2} + h^2).\blacklozenge$$

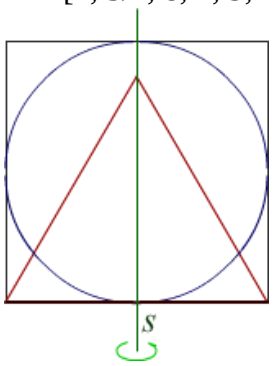
Задаци 13.2.8.

1. У лопти површине $p_1 \cdot \pi$ уписан је ваљак чији осни пресјек има површину p_2. Одредити висину и полупречник основе ваљка, ако је:

i. $p_1 = 58$, $p_2 = 21$;
ii. $p_1 = 68$, $p_2 = 16$;
iii. $p_1 = 82$, $p_2 = 9$.

[7, 3/2; 8, 1; 9, 1/2]

2. У квадрат ивице a је уписан једнакостранични троугао и круг као на слици десно. Основица троугла се поклапа са једном страницом квадрата. Они ротирају око осе s, окомите на основицу квадрата и троугла, формирајући ваљак, купу и лопту. Одредити:



i. Однос површина омотача ваљка, купе и површине лопте;
ii. Однос површина три тјела;
iii. Однос запремина три тјела.

3. У лопти је уписана купа полупречника основе r и висине h. Израчунати површину и запремину лоптиног одсјечка чије су основа и висина једнаке основи и висини купе.

4. Око лопте је описана права зарубљена купа чији су полупречници основа r_1 и r_2. Доказати да је полупречник лопте геометријска средина полупречника основа купе.

5. У лопти је уписана купа. Центар лопте дјели висину купе тако да је већи одсјечак геометријска средина висине и мањег одсјечка. Одредити однос запремина лопте и купе.

6. Раван дјели површину лопте у односу 1 : 3. У ком односу стоје запремине добијених дјелова?

7. Ако се полупречник лопте повећа за 3 cm њена површина се повећа за 108π cm^2. За колико се промјенила запремина лопте?

8. Одсјечак висине 6 dm има запремину 216π dm^3. Колика је запремина одговарајућег исјечка?

9. Лопта пречника 1 m пресјечена је двјема паралелним равнима, које су од цента удаљене 14 cm и 30 cm. Израчунати површину зоне и запремину слоја ако:

i. Обе равни сјеку једну полулопту;
ii. Центар лопте лежи између пресјечних равни.

10. Доказати да од свих ваљака уписаних у сферу полупречника $\frac{\sqrt{3}}{2}$ највећу запремину има онај чија је висина 1.

11. Доказати да од свих правих купа уписаних у сферу полупречника $\frac{3}{4}$ dm највећу запремину има она чија је висина 1 dm.

12. Одредити максималну вриједност размјере запремина лопте и око ње описане купе.

IV Линеарна алгебра

Основни проблем алгебре је рјешавање једначина. У општем случају, то су системи нелинеарних једначина, чија рјешења могу бити реални, или комплексни бројеви.

Рјешити систем од m једначина са n непознатих

$$f_1(x_1, x_2, ..., x_n) = b_1$$
$$f_2(x_1, x_2, ..., x_n) = b_2$$
$$...$$
$$f_m(x_1, x_2, ..., x_n) = b_m$$

гдје су f_i функције непознатих x_j значи наћи све n-торке (i = 1, 2, …, m; j = 1, 2, …, n) бројева x_1, x_2, …, x_n, које уврштене у сваку од горњих функција f_i дају одговарајуће вриједности b_i са десних страна једнакости. Посебно, у линеарној алгебри f_i су линеарне функције промјењивих x_j.

За два система једначина кажемо да су **евивалентни** ако је свако рјешење једног уједно и рјешење другог, и обратно, свако рјешење другог је рјешење првог. Три су правила, односно три операције за добијање еквивалентних система:

1. замјена било којих једначина система;
2. множење једначине бројем који није нула;

3. додавање једној једначини друге помножене бројем.

Употреба бар једног од ових правила, за добијање еквивалентног система, назива се **еквивалентна трансформација** система једначина.

14. Линеарне једначине

Основни проблем линеарне алгебре је рјешавање линеарних једначина. То су једначине у којима се у функцијама f_i непознате x_j јављају само у линеарном облику:

$$f_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \text{ , гдје је } i = 1, 2, \ldots, m.$$

На примјер, $f_2 = 3x_1 – 2x_2 + x_3$, је друга функција са три непознате x_1 , x_2 и x_3.

14.1. Примјери линеарних једначина

Међу најстаријим познатим примјерима систематског рјешавања линеарних једначина убраја се кинеска збирка задатака „Математика у девет књига“ (*Zhou Bi Suan Jing*: 九章算术), из периода 10 – 2. вијека п.н.е.

Примјер 14.1.1.

У кавезу се налазе фазани и зечеви; све те животиње имају укупно 35 глава и 94 ноге. Колико је фазана, а колико зечева?

Ако би у кавезу били само фазани (лажна претпоставка), онда би број ногу износио 70, а не 94. Према томе, вишак од 24 ноге припада зечевима – по два свакоме. Тако је јасно да зечева има 24 : 2 = 12, а фазана 35 – 12 = 23.

У данашњим ознакама, стављамо x – број фазана, y – број зечева, и формирамо систем једначина:

$$\begin{aligned} x + y &= 35 \\ 2x + 4y &= 94 \end{aligned}$$

чије рјешење је $x = 23$, $y = 12$. ♦

Следећи примјер је узет из исте кинеске збирке „Математика у девет књига“, VII књиге, гдје се рјешава методом двије лажне претпоставке, овдје дате са мало прилагођавања савременој нотацији.

Примјер 14.1.2.

Имамо 9 једнаких легура злата и 11 једнаких легура сребра. Када су стављене на тасове теразија, теразије су биле у равнотежи. Међутим, када су на тасовима међусобно замјенили једну легуру злата и једну легуру сребра, онда је маса на првом тасу, оном са 9 легура (8 злата и 1 сребра) била мања за 16 лана (јединица тежине). Питање је колика је маса сваке легуре посебно?

У **данашњим ознакама**, x – маса једне легуре злата, y – маса једне легуре сребра, па имамо систем линеарних једначина

$$9x = 11y$$
$$8x + y + 16 = 10y + x$$

отуда добијамо: $x = 44$, $y = 36$ лана.

Кинески аутор, на посебној дасци за рачунање, излаже правило (двије лажне претпоставке) којим, такође, долази до тачног резултата.

Прва лажна претпоставка, је да је маса легуре злата $x_1 = 55$ (лана). Тада је маса легуре сребра $y_1 = 9x_1/11 = 45$ (лана). Према услову задатка, морали бисмо имати (другу) једнакост

$$8x_1 + y_1 + 16 = 10y_1 + x_1.$$

Међутим, лијева страна износи $8\cdot55 + 45 + 16 + 501$, а лијева страна $10\cdot45 + 55 + 505$, што значи да лијевој страни недостаје 4 лана. Број $k_1 = 4$ је „мањак лијеве стране“, односно то је „вишак десне стране“.

Друга лажна претпоставка, је да је маса злата $x_2 = 22$ лана. Сада је $y_2 = 9x_2/11 = 18$ лана. Према услову задатка, сада имамо

$$8x_2 + y_2 + 16 = 10y_2 + x_2.$$

Уврштавањем, добијамо да лијева страна износи $8\cdot22 + 18 + 16 = 210$, а десна $10\cdot18 + 22 = 202$. Према томе, лијева страна је већа од десне за 8 лана. Број $k_2 = 8$ је „мањак лијеве стране“, односно то је „вишак десне стране“. Даље се саставља таблица

$$\begin{pmatrix} k_1 & k_2 \\ x_1 & x_2 \end{pmatrix}$$

и ријечима наводи следеће правило, које би у данашњој симболици било

$$x = \frac{k_1x_1 + k_2x_2}{k_1 + k_2} = \frac{4\cdot22 + 8\cdot55}{4 + 8} = 44 \text{ лана.}$$

Права вриједност за x налази се између обе „норме“, тј. $x_2 < x < x_1$. Затим се одређује маса легуре сребра $y = 9x/11 = 9\cdot44/11 = 36$ лана.

У старокинеском тексту, пише, маса легуре злата је 2 цзина 12 лана, а маса легуре сребра је 2 цзина 4 лана (1 цзин = 16 лана).♦

Методе лажне претпоставке су биле веома популарне у Европи током средњег, па све до 18. вијека.

Следећи је примјер рјешавања **методом супституције**, или замјене, добро познатом из основне школе.

Примјер 14.1.3.
Неки господин је купио кочије, коња и опрему за 360 новчаних јединица. Коњ је два пута скупљи од опреме, а кочија је два пута скупља од коња и опреме заједно. Колике су поједине цјене?

Означимо са x – цјену кочије, y – коња, z – опреме. Према датим условима је

$$x + y + z = 360 \wedge y = 2z \wedge x = 2(y + z).$$

Другу од једначина уврстимо у трећу, добијамо $x = 6z$, а затим обе уврстимо у прву и добијамо $9z = 360$, одакле $z = 40$. Враћањем овог резултата у претходне једначине добијамо $x = 240$, $y = 80$ и $z = 40$. Другим рјечима, кочија, коњ и опрема су коштали редом 240, 80 и 40 новчаних јединица. ♦

Примјер 14.1.4.
Отац има 6 синова, од којих је сваки 4 године старији од свог следећег млађег брата, а најстарији је три пута старији од најмлађег. Колико им је година?

Означимо са $x_1, \ldots, x_6$ бројеве година синова од најстаријег до најмлађег. Према условима задатка имамо

$$((x_j = x_{j+1} + 4)\ (\forall j \in \{1, \ldots, 5\})) \wedge (x_1 = 3 \cdot x_6).$$

Према томе,

$$(x_5 = x_6 + 4,\ x_4 = x_6 + 8,\ x_3 = x_6 + 12,\ x_2 = x_6 + 16,\ x_1 = x_6 + 20) \wedge (x_1 = 3 \cdot x_6).$$

Отуда

$$3x_6 = x_6 + 20, \text{ тј. } x_6 = 10.$$

Дакле, најмлађи син има 10 година, а за њим слиједе синови са по 14, 18, 22, 26 и 30 година. ♦

Задаци 14.1.5.
1. Мирко воли да иде у биоскоп. Цијена улазнице за матине је 6 КМ, а вечерње пројекције је 8 КМ. Ако је Мирко гледао укупно 12 пројекција и потрошио 86 КМ, на колико је био вечерњих представа?

[7]

2. Улазница за сајам за дјецу је \$1.5 и за одрасле \$4. Једног дана је на сајму било 2200 посјетилаца и прикупљено је \$5050. Колико одраслих је било на сајму?

[700]

3. Збир цифара двоцифреног броја је 7. Када цифре замјене мјеста, број се повећа за 27. Који је то број?

4. Компанија за уређење вртова је примила двије наруџбе. Прва наруџба је била за 13 жбунова и 4 дрвета са укупном цјеном 487£. У другој наруџби је било 6 жбунова и два дрвета по укупној цјени 232£. Колика је била цјена једног жбуна, а колика дрвета?

5. Путничком авиону је требало три часа да прелети 1800 километара летећи низ ваздушни ток (енг. *jetstream*). У повратку, летећи у сусрет истом ваздушном току, требало му је 4 часа. Колика је брзина авиона у мирном ваздуху и колика је брзина ваздушног тока?

Упутство: Нека је v – брзина авиона у мирном ваздуху и w – брзина ваздушног тока. Тада је $3(v + w) = 4(v – w) = 1800$.

6. Наћи једначину параболе која пролази тачкама (–1, 9), (1, 5) и (2, 12).

Упутство: Поћи од опште једначине параболе $y = ax^2 + bx + c$.

7. Наћи декомпозицију на парцијалне разломке израза:

$$\frac{5x+7}{x^3+2x^2-x-2}.$$

Упутство: Фактори датог називника су називници из $\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x-1}$.
Сабирањем и изједначавањем коефицијената са датим бројником добијамо систем три линеарне једначине.

8. Треба ми укупно 100 птица, 3 различите врсте (по x_1, x_2 и x_3 комада). Имам укупно \$100. Ако пилићи коштају 50 центи, патке 3 долара, ћурке 10 долара, колико сваких ми треба да имам 100 птица и да потрошим 100 долара?

Упутство: Збир x-ова је 100, такође, пола x_1 плус три x_2 плус десет x_3 је 100. Добијам $x_2 = 20 + (19/5)x_3$, а тражим цјеле бројеве.

14.2. Гаусова метода елиминације

Систем од m **линеарних једначина** са n непознатих има облик

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$\ldots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m .$$

Овдје су a_{ij} бројеви (i = 1, 2, …, m; j = 1, 2, …, n) које називамо **коефицијенти** (линеарног) система, а b_i су бројеви које називамо **слободни чланови** или десне стране система, док су x_j бројеви које називамо **непознате**, или варијабле **система.** Када је број једначнина једнак броју непознатих ($m = n$) кажемо да имамо квадратни, а иначе, да имамо правоугаони систем.

Проширена матрица коефицијената овог система линеарних једначина је

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & y_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & y_2 \\ \ldots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & y_m \end{pmatrix}$$

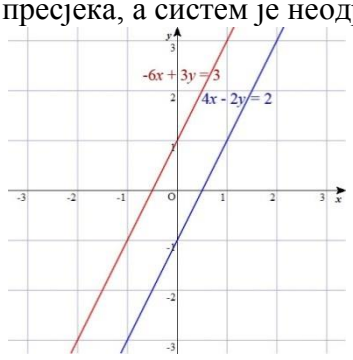
Рјешење система линеарних једначина је било који низ од n бројева $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$, који као замјена одговарајућих непознатих величина ($x_j = \beta_j$) идентички задовољава систем.

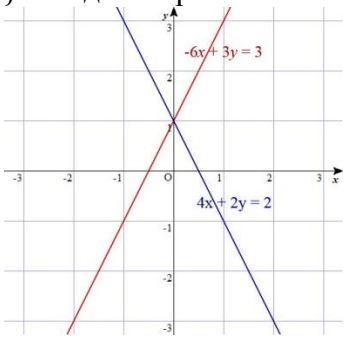
Систем линеарних једначина може имати: ниједно, једно (коначно много), или више (безброј) рјешења. У првом случају кажемо да је **систем немогућ**, у другом да је **одређен**, а у трећем да је **неодређен**. Ево примјера:

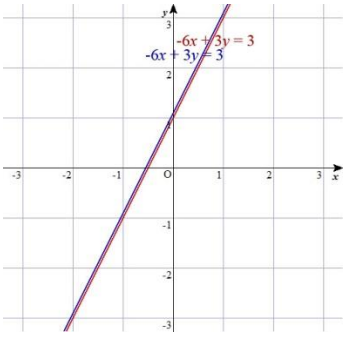
Немогућ	Одређен	Неодређен
$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$	$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 - x_2 = 1 \end{cases}$	$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$
Ниједно рјешење	Једно рјешење	Више рјешења

Немогућ, систем једначина који нема рјешења назива се и **контрадикција.** Одређени и неодређени системи једначина се називају **сагласни** системи. Дакле, сагласан је систем који има бар једно рјешење.

Линеарне једначине са двије непознате x и y, представља праве у координатном систему XOY. Тачке њихових пресјека су рјешење система. Тако, систем је немогућ када нема пресјека и праве су паралелне, систем је одређен када постоји једна тачка пресјека, а систем је неодређен када се праве поклапају.







Паралеле	Пресјек	Поклапање

На претходним сликама су дате: паралелне праве $-6x+3y=3$ и $4x-2y=2$, праве које се сјеку $-6x+3y=3$ и $4x+2y=2$, и праве које се поклапају.

Системе са три непознате представљају равни у 3-дим системима координата.

Када су сви слободни чланови система једнаки нули ($y_1 = 0, y_2 = 0, ..., y_m = 0$) систем је **хомоген**, у противном случају је нехомоген. Сваки хомоген систем је сагласан, јер има бар једно рјешење, низ од самих нула ($x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$), које се назива **тривијално** рјешење. Неодређен хомоген систем има и нетривијална рјешења.

Један од општих начина рјешавања линеарних система једначина, путем еквивалентних трансформација, је **Гаусова метода** (*Carl Friedrich Gauss*, 1777 – 1855), или Гаус-Јорданова метода елиминације, алгоритам који смо у нижим разредима називали и метода супротних коефицијената. Дати систем једначина се овом методом своди на еквивалентан систем који има тзв. **горњу троугаону форму**

$$\begin{cases} a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + ... + a'_{1n}x_n = b'_1 \\ a'_{22}x_2 + ... + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ ... \\ a'_{mn}x_n = b'_m \end{cases}$$

одакле, из последње (m-те) једначнине добијамо $x_m = b'_m / a'_{mn}$. Увртавањем у претходну једначину добијамо x_{n-1}, које затим, заједно са већ добијеним, увртавамо у претходну једначину да би добили следеће x, и тако редом, све док не добијемо комплетно рјешење система.

14.2.1. Примјер

Провјерити да ли систем линеарних једначина има рјешење:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Када би примјењивали Гаусов метод, овдје бисмо, рецимо, множили прву (горњу) једначину са -1 и резултат додали другој, затим трећој. Коначни резултат је еквивалентан систем:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 0 - 2x_2 - 0 = -1 \\ 0 + 0 + 0 = -2 \end{cases}$$

чија је трећа једначина у очигледној контрадицији. То значи да резултирајући систем нема рјешења, што значи да нити почетни, њему еквивалентан систем, такође нема рјешења. Дати систем је **немогућ.**

Исто можемо закључити и непосредно. Наиме, ако је збрир три броја (прва једначина) једнак 2, онда збир иста три броја (трећа једначина) не може бити 0. Према томе, полазни систем је у контрадицији, што значи да нема рјешења. ♦

14.2.2. Примјер
Рјешити систем линеарних једначина:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

Множимо прву једначину са -1 и резултат додајемо другој, па трећој. Добијамо еквивалентан систем:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 0 - 2x_2 - 0 = -1 \\ 0 + 0 - 2x_3 = -2 \end{cases}$$

Из треће и друге једначине непосредно слиједи $x_3 = 1$, $x_2 = 0{,}5$. Када ове резултате уврстимо у прву једначину, добијамо и $x_1 = 0{,}5$. Према томе, систем је **одређен**, односно постоји јединствено рјешење, а то је уређена тројка бројева $(x_1, x_2, x_3) = (½, ½, 1)$. ♦

14.2.3. Примјер
Нађи сва рјешења система линеарних једначина:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$$

Поново, множимо горњу једначину са -1 и резултат додамо редом другој и трећој једначини. Добијамо еквивалентан систем:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 0 + 0 + 0 = 0 \\ 0 + 0 - 2x_3 = -1 \end{cases}$$

Из треће једначине слиједи $x_3 = ½$, другу ће задовољити свака тројка x-ова. Прва једначина, увршатавањем вриједности x_3 даје $x_1 + x_2 = 3/2$. Према томе, можемо узети произвољан број $x_2 = t$, чиме је одређен број $x_1 = 1{,}5 - t$. Дакле, систем је **неодређен**, а (бесконачни) скуп рјешења чине уређене тројке бројева $(x_1, x_2, x_3) = (1 - t, t, 3/2)$, гдје је t произвољан број. ♦

Задаци 14.2.4.
1. У истом 2-дим систему координата нацртати праве:

а) $4x - 6y = 8$, $-6x + 9y = 10$

б) $4x - 6y = 8$, $9x - 6y = 12$

в) $-9x + 6y = 12$, $6x - 4y = -8$

2. Нађи рјешење система линеарних једначина:

а)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$$

б)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 = -1 \\ x_1 - x_2 - x_3 = -3 \end{cases}$$

[(2,5; -0,5; -1) и (-0,5;1,5;1)]

3. Наћи сва рјешења система:

а)

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

б)

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$$

в)

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$$

[(0,5; 0,5; -0,5), ∅, (-t; 1+t; t)]

4. Наћи сва рјешења система:

а)

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 2\,x_1 + 6x_2 + 8x_3 &= 3 \\ 6\,x_1 + 8x_2 + 18x_3 &= 5 \end{aligned}$$

б)

$$\begin{aligned} 3x + y - 6z &= -10 \\ 2x + y - 5z &= -8 \\ 6x - 3y + 3z &= 0 \end{aligned}$$

в)

$$\begin{aligned} x + z &= 1 \\ x + y + z &= 2 \\ x - y + z &= 1 \end{aligned}$$

[(3/10, 2/5, 0); (t – 2, 3t – 4, t); ∅]

5. Гаусовом методом рјешити систем:

а)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 - 3i \\ -x_1 + x_2 - x_3 = -1 + i \\ x_1 - x_2 - x_3 = -2 - i \end{cases}$$

б)

$$\begin{cases} ix_1 - 2x_2 + 3ix_3 = 4 - 3i \\ 2x_1 - ix_2 - 2x_3 = -5 + 4i \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2 + 3i \end{cases}$$

6. Одредити параметар α тако да је систем сагласан, и рјешити га:

а)

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = \alpha + 2 \\ -x_1 + 11x_2 - 5x_3 = 5 \end{cases}$$

б)

$$\begin{cases} 2x_1 - x_3 = -1 \\ x_1 + 3x_2 - 14x_3 = \alpha - 25 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 = 11 \end{cases}$$

7. Ако је α реалан број, рјешити систем једначина:

а)

$$\begin{cases} \alpha x + y + z = 1 \\ x + \alpha y + 2z = 2 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases}$$

б)

$$\begin{cases} \alpha x + y - z = \alpha \\ x + \alpha y - z = 1 \\ x - y - \alpha z = \alpha \end{cases}$$

8. Наћи рјешење система:

а)

б)

$$\begin{cases} x+2y+3z-u=4 \\ 2x-2y+z-4u=-7 \\ x-3y+z+3u=5 \\ x+y-2z-3u=-6 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+2y-3u+2v=1 \\ x-y-3z+u-3v=2 \\ 2x-3y+4z-5u+2v=7 \\ 9x-9y+6z-16u+2v=25 \end{cases}$$

[(1,1,1,2); ∅]

14.3. Обрнути задатак

Помоћу следећег примјера ћемо покушати разумјети смисао директног и обрнутог (инверзног) система линеарних једначина.

Примјер 14.3.1.
Нека фабрика производи двије врсте артикала. Једна пошиљка садржи x_1 комада артикала прве врсте и x_2 комада артикала друге врсте. Тежина једног артикла прве, односно друге врсте је a_{11}, односно a_{12} (јединица тежине). Фабричке цијене првог, односно другог артикла су редом a_{21} и a_{22} (новчаних јединица). Према томе имамо систем линеарних једначина:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = y_1 \text{ – тежина}$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = y_2 \text{ – цијена,}$$

гдје су y_1 – укупна тежина пошиљке и y_2 – укупна фабричка цијена пошиљке.

Директни задатак је израчунати тежину (y_1) и цјену (y_2) пошиљке, када су познате количине артикала (x_1 и x_2), њихове појединачне тежине (a_{11} и a_{12}) и њихове појединачне цјене (a_{21} и a_{22}).

Обрнути задатак је израчунати количине артикала (x_1 и x_2), када су познате тежина и цијена пошиљке (y_1 и y_2), њихове појединачне тежине (a_{11} и a_{12}) и њихове појединачне цјене (a_{21} и a_{22}).♦

Рјешавајући систем линеарних једначина, заправо, рјешавамо обрнути (инверзни) задатак, док директним провјеравамо резултате. Када нађемо опште рјешење, тако да вриједности x-ова изразимо помоћу произвољних y-она, онда смо у обрнутој позицији:

$$x_1 = b_{11}y_1 + b_{12}y_2$$
$$x_2 = b_{21}y_1 + b_{22}y_2$$

која опет представља неки систем линеарних једначина, који је у одређеном случају еквивалентан полазном.

Примјер 14.3.2.
Наћи обрнути (инверзан) систем система линеарних једначина:

$$x_1 + 2x_2 = y_1$$
$$2x_1 + 3x_2 = y_2 .$$

Користимо Гаусову методу елиминације. Прву (горњу) једначину множимо са -2 и резултат додајемо другој. Добијамо еквивалентан систем:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= y_1 \\ -x_2 &= -2y_1 + y_2 . \end{aligned}$$

Затим, множимо другу (доњу) једначину са 2 и додајемо је горњој. На крају, множимо доњу са -1.

$$\begin{aligned} x_1 &= -3y_1 + 2y_2 \\ x_2 &= 2y_1 - y_2 . \end{aligned}$$

Рецимо, ако су x_1 и x_2 редом 3 и -4, из датог система израчунавамо y_1 и y_2 редом -5 и -6. Обрнуто, ако су израчунавамо y_1 и y_2 редом -5 и -6, из резултирајућег система израчунавамо да су x_1 и x_2 редом 3 и -4.♦

Примјер 14.3.3.
Показаћемо да је обрнути (инверзан) систем обрнутом, из претходног задатка, једнак полазном систему линеарних једначнина.

Наиме, када у систем $\begin{cases} x_1 = -3y_1 + 2y_2 \\ x_2 = 2y_1 - y_2 \end{cases}$ уврстимо $\begin{cases} y_1 = x_1 + 2x_2 \\ y_2 = 2x_1 + 3x_2 \end{cases}$ добијамо

$$\begin{cases} x_1 = -3(x_1 + 2x_2) + 2(2x_1 + 3x_2) \\ x_2 = 2(x_1 + 2x_2) - (2x_1 + 3x_2) \end{cases}$$

а отуда сређивањем

$$\begin{cases} x_1 = (-3+4)x_1 + (-6+6)x_2 = x_1 \\ x_2 = (2-2)x_1 + (4-3)x_2 = x_2 \end{cases}$$

тј. имамо идентитет: $x_1 = x_1$, $x_2 = x_2$.♦

Лако је разумјети да ово важи у општем случају: Обрнути (инверзан) систем обрнутом је полазни систем једначина.

Теорема 14.3.4.
Обрнути (инверзан) систем може имати само одређен систем линеарних једначина.

Доказ.
Претпоставимо супротно, да систем који нема једиствено рјешење има инверзни систем. Тада, за дате вриједности *y*-а, увијек можемо израчунати јединствене вриједности *x*-ова, што је оба случаја у контрадикцији са претпоставком: у случају

да дати систем нема рјешење и, у другом, да за дати низ y-а има више (бесконачно много) x-ова.♦

Систем линеарних једначина који има јединствено рјешење назива се и **регуларан** систем. Инверзан систем једначина могу имати само регуларни системи.

Задаци 14.3.5.

1. Ако 4 јабуке и 2 наранџи коштају $y_1 = 1$ КМ, а 2 јабуке и 3 наранџе коштају $y_2 = 0{,}70$ КМ, колико кошта само једна јабука (x_1), или наранџа (x_2)? Формирати директни и обрнути задатак за овај проблем. Како гласи обрнути систем?

[(0.2, 0.1); $x_1 = 0.3751y_1 - 0.25y_2 \wedge x_2 = -0.25y_1 - 0.5y_2$]

2. Неки тест има $y_1 = 50$ питања, на којима се може освојити укупно $y_2 = 145$ поена. Нека од питања носе 2, а нека 5 поена. Колико је питања (x_1) са 2, а колико (x_2) са 5 поена? Формирати директни и обрнути задатак. Како гласи обрнути систем? Има ли овај ограничења у датом проблему?

[(35, 15); $x_1 = (5/3)y_1 - (1/3)y_2 \wedge x_2 = -(2/3)y_1 + (1/3)y_2$]

3. Наћи композицију система. Наћи обрнуте системе и њихову композицију. Да ли је обрнути систем композиције једнак композицији обрнутих система?

а) $\begin{cases} x_1 = 2y_1 - y_2 \\ x_2 = y_1 - 3y_2 \end{cases}$ $\begin{cases} y_1 = z_1 + 2z_2 \\ y_2 = 2z_1 - 4z_2 \end{cases}$

б) $\begin{cases} x_1 = y_1 + 3y_2 \\ x_2 = 0.5y_1 - y_2 \end{cases}$ $\begin{cases} y_1 = -z_1 + z_2 \\ y_2 = 2z_1 - z_2 \end{cases}$

4. Наћи инверзан систем линеарног система:

а)
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = y_1 \\ 2x_1 + 6x_2 + 8x_3 = y_2 \\ 6x_1 + 8x_2 + 18x_3 = y_3 \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = y_1 \\ -x_1 + x_2 - x_3 = y_2 \\ x_1 - x_2 - x_3 = y_3 \end{cases}$$

5. Означимо у претходном примјеру системе под а) и б) са: $y = A(x)$ и $y = B(x)$.

а) Наћи композицију A о B.
б) Наћи композицију B о A.
в) Наћи композицију A^{-1} о B^{-1}.
г) Наћи композицију B^{-1} о A^{-1}.

6. Наћи инверзан систем линеарног система:

а)
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = y_1 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = y_2 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = y_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = y_4 \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = y_1 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = y_2 \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = y_3 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = y_4 \end{cases}$$

15. Детерминанте

Детерминанта *n*-тог реда је у математички израз за квадратну шему са n^2 бројева поређаних у $n = 2, 3, 4, \ldots$ редова и исто толико колона.

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & & \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Детерминанте је први открио и проучавао Лајбниц (*Gottfried Wilhelm Leibniz*, 1646 – 1716) испитујући рјешења система линеарних једначина 1693. године. Касније, 1750. је Крамер (*Gabriel Cramer*, 1704 – 1752) пронашао правила за рјешавање једначина помоћу детерминанти, а Лајбницово откриће је у међувремену заборављено. Широка примјена детерминанти у математици се десила након радова Јакобија (*Carl Gustav Jacob Jacobi*, 1804 – 1851), а назив детерминанта увео је Гаус (*Carl Friedrich Gauss*, 1777 – 1855).

15.1. Детерминанта 2. реда

Дат је најопштији систем двије једначине са двије непознате у основном облику:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{aligned}$$

гдје су a_{11}, a_{12}, b_1, a_{21}, a_{22}, b_2 дати реални бројеви (параметри система), при чему претпостављамо да је бар један од коефицијената система (a_{ij}) различит од нуле.

Прву једначину множимо са a_{22}, другу са a_{12} и одузимамо их. Затим, поново, прву једначину множимо са a_{21}, другу са a_{11} и одузмемо их. Добијамо

$$\begin{aligned} (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x_1 &= b_1a_{22} - b_2a_{12} \\ (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 &= b_2a_{11} - b_1a_{21}. \end{aligned}$$

Ако је $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0$, тада дати систем има јединствено рјешење

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}, \quad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}.$$

Ови резултати се лакше памте када се запишу помоћу детерминанте другог реда

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Елементи детерминанте (овдје *a*, *b*, *c* и *d*), а и резултат, детерминанта је број. Са овом нотацијом, претходно рјешење се може писати

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot x_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$$
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot x_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

односно

$$\Delta \cdot x_1 = \Delta_1,$$
$$\Delta \cdot x_2 = \Delta_2.$$

Детерминанта Δ назива се **детерминанта система**, која се састоји од коефицијената датог линеарног система једначина. Детерминанте Δ_1 и Δ_2 добијамо када прву, односно другу (тј. x-колону) коефицијената детерминанте система замјенимо са слободним члановима са десне стране једнакости. Тако добијен систем, назива се **Крамеров систем**.

Примјер 15.1.1.
Помоћу детерминанти рјешити систем једначина

$$x + 2y = 3 \wedge 2x + 3y = 4.$$

Детерминанте Крамеровог система су

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 4 = -1,\ \Delta_x = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 8 = 1,\ \Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2,$$

помоћу њих дефинишемо Крамеров систем

$\Delta \cdot x = \Delta_x \wedge \Delta \cdot y = \Delta_y$, тј. $(-1) \cdot x = 1 \wedge (-1) \cdot y = -2$, односно $x = -1 \wedge y = 2$.

Рјешење провјеравамо непосредним увртавањем

$$(-1) + 2 \cdot (2) = 3 \wedge 2 \cdot (-1) + 3 \cdot (2) = 4,$$

што је тачно.♦

Када је детерминанта система једнака нули, тј. $\Delta = 0$, тада Крамеров систем гласи: $0 \cdot x = \Delta_x$, $0 \cdot y = \Delta_y$, па експлицитно представљање рјешења није могуће. Систем нема јединствено рјешење. Из тога слиједе двије могућности:

i. Ако су обе преостале детерминанте једнаке нули, тј. $\Delta_x = \Delta_y = 0$, тада Крамеров систем гласи $0 \cdot x = 0$, $0 \cdot y = 0$, тј. има бесконачно много рјешења, систем је неодређен.

ii. Ако бар једна од преосталих детерминанти није једнака нули, тада је Крамеров систем у контрадикцији, што значи да дати систем нема рјешења.

Примјер 15.1.2.
Рјешити и дискутовати систем линеарних једначина:

$$\lambda x + y = 1 \wedge x + \lambda y = 1.$$

Детерминанте овог система су

$$\Delta = \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1,\ \Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda - 1,\ \Delta_y = \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \lambda - 1,$$

па је Крамеров систем ($\Delta \cdot x = \Delta_x \wedge \Delta \cdot y = \Delta_y$):

$$(\lambda^2 - 1)x = \lambda - 1 \wedge (\lambda^2 - 1)y = \lambda - 1.$$

(**i**) Када је $\lambda^2 - 1 \neq 0$, тј. $\lambda \neq \pm 1$, тада имамо јединствено рјешење

$$x = \frac{1}{\lambda + 1} \wedge y = \frac{1}{\lambda + 1}.$$

(**ii**) Када је $\lambda = 1$, увртавањем у Крамеров систем добијамо $0 \cdot x = 0 \wedge 0 \cdot y = 0$, што значи да имамо бесконачно много рјешења и да је дати систем неодређен.

Ако хоћемо да тачније опишемо сва та рјешења, враћамо се на полазни систем, који у овом случају има једначину $x + y = 1$ два пута. Ставимо $y = t$, гдје је t произвољан број, онда сва рјешења можемо описати као скуп тачака $(1 - t, t)$. У случају реалних бројева t то је права $x + y = 1$ у равни xOy.

(**iii**) Када је $\lambda = -1$, увртавањем у Крамеров систем добијамо $0 \cdot x = -2 \wedge 0 \cdot y = -2$, што је контрадикција. Систем је немогућ, дати систем нема рјешења. ♦

Теорема 15.1.3.

1. Вриједност детерминанте се не мјења ако колоне замјенимо врстама.
2. Детерминанта мјења знак, ако колоне (врсте) замјене мјеста.
3. Ако једну колону (врсту) помножимо бројем k вриједност детерминанте се помножи са k.
4. Ако су двије колоне (врсте) пропорционалне, вриједност детерминанте је нула.
5. Вриједност детерминанте се не мјења ако се елементима једне колоне (врсте) додају одговарајући елементи друге колоне (врсте) претходно помножени неким бројем.
6. $\begin{vmatrix} a_1 + a_2 & b \\ c_1 + c_2 & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b \\ c_1 & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & b \\ c_2 & d \end{vmatrix}.$

Доказ: 1. Слиједи из $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ и $\Delta_1 = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc = \Delta$. 2. Слиједи из $\Delta_1 = \begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix} = bc - ad = -\Delta$, а за врсте употребимо претходни. 3. Слиједи из $\Delta_3 = \begin{vmatrix} ka & b \\ kc & d \end{vmatrix} = kad - kbc = k(ad - bc) = k \cdot \Delta$. 4. Слиједи из $\Delta_4 = \begin{vmatrix} a & ka \\ c & kc \end{vmatrix} = kac - kac = 0$. 5. Слиједи из $\Delta_5 = \begin{vmatrix} a - kb & b \\ c - kd & d \end{vmatrix} = (a - kb)d - (c - kd)\, b = ad - kbd - bc + kbd = ad - bc = \Delta$. 6. $\begin{vmatrix} a_1 + a_2 & b \\ c_1 + c_2 & d \end{vmatrix} = (a_1 + a_2)d - (c_1 + c_2)b = (a_1 d - c_1 b) + (a_2 d - c_2 b) = \begin{vmatrix} a_1 & b \\ c_1 & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & b \\ c_2 & d \end{vmatrix}$. ♦

Задаци 15.1.4.

1. Помоћу детерминанти, наћи сва рјешења система линеарних једначина:

i.
$$-6x_1 + 3x_2 = 3$$
$$4x_1 - 2x_2 = 2$$

ii.
$$6x_1 - 3x_2 = -3$$
$$4x_1 + 2x_2 = 2$$

iii.
$$-6x_1 + 3x_2 = 3$$
$$4x_1 - 2x_2 = -2$$

2. Свести на основни облик и рјешити Крамеровим формулама систем:

i. $\dfrac{6x+3y}{12} - \dfrac{3x-6y}{6} = 1 \wedge \dfrac{2x+y}{3} + \dfrac{6x+12y}{6} = 7$;

ii. $\dfrac{2x-y+3}{3} - \dfrac{x-2y+3}{4} = 4 \wedge \dfrac{3x-4y+3}{4} + \dfrac{4x-2y-9}{3} = 4$;

iii. $7 + \dfrac{x-3y}{4} = 2x - \dfrac{y+5}{3} \wedge \dfrac{10(x-y)-4(1-x)}{3} = y$;

iv. $\dfrac{2(x-y)}{3} + 1{,}6 = \dfrac{8x}{15} - \dfrac{3y-10}{5} \wedge \dfrac{3x+4}{4} + \dfrac{y}{8} = \dfrac{5x}{6} - \dfrac{y-17}{12}$.

3. Увођењем нових непознатих рјешити систем:

i. $\dfrac{4}{x} - \dfrac{7}{y} = -13 \;\; \dfrac{6}{x} + \dfrac{4}{y} = 24$;

ii. $\dfrac{10}{x-5} + \dfrac{1}{y+2} = 1 \wedge \dfrac{25}{x-5} + \dfrac{3}{y+2} = 2$;

iii. $\dfrac{1}{x-y+2} + \dfrac{1}{1-x-y} = 0{,}1 \wedge \dfrac{1}{x-y+2} + \dfrac{1}{x+y-1} = 0{,}3$.

4. Рјешити систем једначина:

i. $2x_1 + 3|x_2| = 13 \wedge 3x_1 - x_2 = 3$;

ii. $2x_1 - 3|x_2| = 1 \wedge |x_1| + 2x_2 = 4$;

iii. $|x + y| = 1 \wedge |x| + y = 1$;

iv. $|2x + 3y| = 5 \wedge |2x - 3y| = 1$.

5. Одредити вриједност параметра λ тако да систем буде одређен (сагласан), тј. да има јединствено рјешење:

i.
$$\begin{aligned} 3x + \lambda y &= 5 + \lambda \\ 2x + 5y &= 8; \end{aligned}$$

ii.
$$\begin{aligned} \lambda x + (\lambda + 1)y &= 3 \\ 2x + 3y &= \lambda - 1. \end{aligned}$$

6. Одредити вриједност параметра μ тако да систем буде неодређен (сагласан), тј. да има бесконачно рјешења:

i.
$$\begin{aligned} (2\mu - 1)x + \mu y &= 6 \\ 7{,}5x + 4y &= 3; \end{aligned}$$

ii.
$$\begin{aligned} 2x + (\mu - 1)y &= 3 \\ (\mu + 1)x + 4y &= -3. \end{aligned}$$

7. Одредити вриједности параметра a и b тако да систем буде немогућ (противрјечан), тј. да нема рјешења:

i.
$$\begin{aligned} ax_1 + (b - 2)x_2 &= 5a \\ bx_1 + 4x_2 &= 3 - b; \end{aligned}$$

ii.
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 6 \\ 4x_1 - ax_2 &= b. \end{aligned}$$

8. Утврдити за које вриједности параметара је наведени систем једначнина одређен, неодређен, или немогућ, тј. дискутовати рјешења:

i. $ax + 5y = 5a \wedge x + 2y = 3a$;

ii. $ax + y = b \wedge \frac{1}{b}x + y = a$;

iii. $\frac{x-a}{b} + \frac{y-b}{a} = 1 \wedge \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$;

iv. $\frac{x}{a+b} + \frac{y}{a-b} = 2a \wedge x - y = 4ab$.

9. Користећи правила 1-5. (теорема 15.1.3.) израчунати детерминанте:

$$\begin{vmatrix} 57 & 29 \\ 54 & 28 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 101 & 119 \\ 50 & 59 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 57 & 19 \\ 45 & 15 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1215 & 8 \\ 525 & 4 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 17 & 15 \\ 35 & 33 \end{vmatrix} \qquad \frac{1}{3}\begin{vmatrix} 38 & 17 \\ 27 & 18 \end{vmatrix}.$$

15.2. Детерминанта вишег реда

Дат је најопштији систем три једначине са три непознате у основном облику:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3$$

гдје су a_{ij} и b_j (i, j = 1, 2, 3) дати реални бројеви (параметри система), при чему претпостављамо нису сви коефицијената система (a_{ij}) једнаки нули.

Да би рјешили овај систем једначина, искључићемо другу и трећу непознату

$$a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 - a_{21}x_1$$
$$a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 - a_{31}x_1 .$$

Даље, рјешавамо систем са двије непознате x_2 и x_3. Добијамо

$$\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} x_2 = \begin{vmatrix} b_2 - a_{21}x_1 & a_{23} \\ b_3 - a_{31}x_1 & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_2 & a_{23} \\ b_3 & a_{33} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{21}x_1 & a_{23} \\ a_{31}x_1 & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_2 & a_{23} \\ b_3 & a_{33} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} x_1 ,$$
$$\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} x_3 = \begin{vmatrix} a_{22} & b_2 - a_{21}x_1 \\ a_{32} & b_3 - a_{31}x_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{22} & b_2 \\ a_{32} & b_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{22} & a_{21} \\ a_{32} & a_{31} \end{vmatrix} x_1 .$$

Ако прву једначину датог система помножимо са факторима друге и треће промјењиве из ових израза, након сређивања добијамо

$$\left(a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \right) x_1 =$$
$$= b_1\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} b_2 & a_{23} \\ b_3 & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} b_2 & a_{22} \\ b_3 & a_{23} \end{vmatrix} .$$

Видимо да се фактор уз прву непознату може писати као детерминанта 3. реда

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} .$$

Израз десно од једнакости је такође детерминанта 3. реда

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = b_1\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} b_2 & a_{23} \\ b_3 & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} b_2 & a_{22} \\ b_3 & a_{23} \end{vmatrix} .$$

Аналогно, добијамо изразе за другу и трећу непознату, у којима је фактор уз непознату исти, а десно од једнакости су детерминанте

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} \text{ и } \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Коначно, долазимо до два закључка. Прво, то је начин дефинисања, односно израчунавања детерминанте 3. реда, који је истовремено и начин израчунавања детерминанти уопште. Друго, дефинисали смо тзв. Крамерове формуле за налажење рјешења система линеарних једначина.

Резимирајући прво, можемо рећи да се детерминанта *n*-тог реда ($n = 2, 3, 4, ...$) развија по (произвољној) врсти (или колони), тако што се сваки елемент те врсте множи са својим **кофактором**, који се састоји од предзнака те позиције и детерминанте, која остаје када се избаце врста и редак датог елемента, и свих тако добијених *n* фактора се саберу. Предзнаци позиција су распоређени као црно-бијела поља на шаховској плочи, с тим да је горње лијево поље увијек плус, као на следећој шеми.

$$\begin{vmatrix} + & - & + & \dots \\ - & + & - & \\ + & - & + & \\ \dots & & & \end{vmatrix}$$

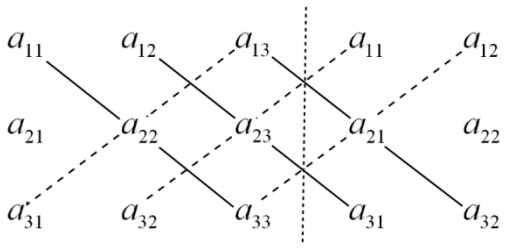
Тим поступком се детерминанта *n*-тог реда своди на *n* детерминанти реда *n*-1.

Прву детерминанту (Δ) називамо **детерминанта система**, а следеће три су **детерминанте непознатих** (x_1, x_2 и x_3), које формирамо тако што у првом случају (Δ_1) умјесто прве колоне (колоне x_1) у детерминанту система уписујемо десну, слободну колону (колону *b*), у другом случају (Δ_2), умјесто друге колоне (колоне x_2) у детерминанту система уписујемо десну колону, и у трећем случају (Δ_3) слично, умјесто треће колоне у детерминанту система уписујемо такође десну колону.

Помоћу ове четири детерминанте формирамо **Крамеров систем** једначина, чија су рјешења једнака рјешењима полазног система:

$$\Delta \cdot x_1 = \Delta_1,\ \Delta \cdot x_2 = \Delta_2,\ \Delta \cdot x_3 = \Delta_3.$$

Детерминанту III реда (Δ) можемо израчунати и помоћу **Сарусовог правила** (*Pierre Frédéric Sarrus*, 1798 – 1861). Продужимо коефицијенте детерминанте



десно изван, са још двије колоне циклично, као на слици лијево. Пуним линијама су означене три главне дијагонале, а испрекиданим три споредне. Помножимо све тројке тих бројева, а затим од збира производа главних дијагонала одузмимо збир производа споредних дијагонала. Добијамо:

$\Delta = (a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33} + a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31} + a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{32}) - (a_{31}\cdot a_{22}\cdot a_{13} + a_{32}\cdot a_{23}\cdot a_{11} + a_{33}\cdot a_{21}\cdot a_{12})$.

Сарусово правило важи само за детерминанте 3. реда. Примјетимо да су сабирци у првој загради (са позитивним предзнаком), поредани по индексима: 11,22,33, затим 12,23,31, па 13,32,21, а у другој загради (са негативним предзнаком) имамо остатак од 6 могућих пермутација узимања по три елемента, увијек из различитих врста и колона. Резултат групишимо и добијамо

$$\Delta = a_{11}\cdot(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}\cdot(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{13}\cdot(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22})$$
$$= a_{11}\cdot\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Дакле, Сарусово правило за детерминанте 3. реда је сагласно са претходним, општим начином рјешавања детерминанте, које називамо и **Лапласово разлагање**.

Примјер 15.2.1.
Помоћу Сарусовог правила израчунати детерминанту 3. реда:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -4 & -7 \\ 2 & 5 & -8 \\ -3 & 6 & 9 \end{vmatrix}.$$

Рјешење: Цртамо шему за множење и сабирање по дијагоналама:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -4 & -7 \\ 2 & 5 & -8 \\ -3 & 6 & 9 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & -4 \\ 2 & 5 \\ -3 & 6 \end{matrix}$$

Затим, израчунавамо

$$D = [1\cdot5\cdot9 + (-4)\cdot(-8)\cdot(-3) + (-7)\cdot2\cdot6] - [(-3)\cdot5\cdot(-7) + 6\cdot(-8)\cdot1 + 9\cdot2\cdot(-4)] =$$
$$(45 - 96 - 84) - (105 - 48 - 72) =$$
$$-135 - (-15) =$$
$$-120.\ \blacklozenge$$

Примјер 15.2.2.
Рјешити систем линеарних једначина:

$$\begin{aligned} x_1 - 4x_2 - 7x_3 &= 5 \\ 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 &= 4 \\ -3x_1 + 6x_2 + 9x_3 &= -2. \end{aligned}$$

Рјешење: Детерминанта система је D = -120. Детерминанте непознатих су:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 5 & -4 & -7 \\ 4 & 5 & -8 \\ -2 & 6 & 9 \end{vmatrix} \begin{matrix} 5 & -4 \\ 4 & 5 \\ -2 & 6 \end{matrix} = (225 - 64 - 168) - (70 - 240 - 144) = 307,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 5 & -7 \\ 2 & 4 & -8 \\ -3 & -2 & 9 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \\ -3 & -2 \end{matrix} = (36 + 120 + 28) - (84 + 16 + 90) = -6,$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 \\ -3 & 6 & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & -4 \\ 2 & 5 \\ -3 & 6 \end{matrix} = (-10 + 48 + 60) - (-75 + 24 + 16) = 133.$$

Формирамо Крамеров систем једначина:

$$D \cdot x_1 = D_1 \wedge D \cdot x_2 = D_2 \wedge D \cdot x_3 = D_3, \text{ тј.}$$

$$-120 \cdot x_1 = 307 \wedge -120 \cdot x_2 = -6 \wedge -120 \cdot x_3 = 133, \text{ одакле}$$

$$x_1 \approx -2,55833 \wedge x_2 = 0,05 \wedge x_3 \approx -1,10833.$$

Тачност рјешења провјеравамо увртавањем у сами почетни систем:

$$\begin{aligned} -2,55833 - 4 \cdot (0,05) - 7 \cdot (-1,10833) &= 4,99998 \\ 2 \cdot (-2,55833) + 5 \cdot (0,05) - 8 \cdot (-1,10833) &= 3,99998 \\ -3 \cdot (-2,55833) + 6 \cdot (0,05) + 9 \cdot (-1,10833) &= -1,99998. \end{aligned}$$

Ово се може сматрати исправним. ♦

Особине 1-5. детерминанти (теорема 15.1.3.) важе и даље.

Теорема 15.2.3.

1. Вриједност детерминанте се не мјења транспоновањем, када колоне замјенимо врстама.
2. Детерминанта мјења знак, ако двије сусједне колоне (врсте) замјене мјеста.

3. Ако једну колону (врсту) помножимо бројем k вриједност детерминанте се помножи са k.
4. Ако су двије колоне (врсте) пропорционалне, вриједност детерминанте је нула.
5. Вриједност детерминанте се не мјења ако се елементима једне колоне (врсте) додају одговарајући елементи друге колоне (врсте) претходно помножени неким бројем.
6. Збир (разлика) двије детерминанте истог реда, које имају једнаке све колоне (врсте) осим једне k-те, једнак је детерминанти истог реда са датим једнаким колонама (врстама) и са k-том колоном (врстом) која је једнака збиру k-тих.

Доказ: Показаћемо да ова тврђења важе за детерминанте 3. реда.
1. Детерминанта 3. реда и њена транспонована детерминанта су редом

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \text{ и } \Delta^{\tau} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}, \text{ односно}$$

$\Delta = (a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33} + a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31} + a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{32}) - (a_{31}\cdot a_{22}\cdot a_{13} + a_{32}\cdot a_{23}\cdot a_{11} + a_{33}\cdot a_{21}\cdot a_{12})$,
$\Delta^{\tau} = (a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33} + a_{21}\cdot a_{32}\cdot a_{13} + a_{31}\cdot a_{12}\cdot a_{23}) - (a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31} + a_{23}\cdot a_{32}\cdot a_{11} + a_{33}\cdot a_{12}\cdot a_{21})$, из чега видимо да су оне једнаке. **2.** Имамо $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = (a_{12}\cdot a_{21}\cdot a_{33} +$ $a_{11}\cdot a_{23}\cdot a_{32} + a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31}) - (a_{32}\cdot a_{21}\cdot a_{13} + a_{31}\cdot a_{23}\cdot a_{12} + a_{33}\cdot a_{22}\cdot a_{11}) = -\Delta$. Слично добијамо замјеном друге и треће колоне. Транспоновањем добијамо исто и за врсте. **3.** Слиједи из $\Delta_3 = \begin{vmatrix} ka_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & a_{22} & a_{23} \\ ka_{31} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = (ka_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33} + a_{12}\cdot a_{23}\cdot ka_{31} + a_{13}\cdot ka_{21}\cdot a_{32}) -$ $(ka_{31}\cdot a_{22}\cdot a_{13} + a_{32}\cdot a_{23}\cdot ka_{11} + a_{33}\cdot ka_{21}\cdot a_{12}) = k\Delta$. Замјеном колона добијамо слично за остале, а транспоновањем добијамо слично за врсте. **4.** Слиједи из

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} ka_{11} & a_{11} & a_{13} \\ ka_{21} & a_{21} & a_{23} \\ ka_{31} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = (ka_{11}\cdot a_{21}\cdot a_{33} + a_{11}\cdot a_{23}\cdot ka_{31} + a_{13}\cdot ka_{21}\cdot a_{31}) - (ka_{31}\cdot a_{21}\cdot a_{13} +$$

$a_{31}\cdot a_{23}\cdot ka_{11} + a_{33}\cdot ka_{21}\cdot a_{11}) = 0$, јер се први сабирак у провој загради поништава са трећим из друге, други са другим, а трећи са првим. Замјеном колона (правило 3.) видимо да исто важи са било које двије колоне, а транспоновањем видимо да исто важи и за врсте. Користећи Сарусово правило, сами провјерите став 5. и 6. за детерминанте 3. реда. ♦

Задаци 15.2.4.
1. Помоћу Сарусовог правила израчунати детерминанте:

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & -5 & 6 \\ -7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 5 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix}$$

2. Написати развој детерминанте

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

i. По првој колони;
ii. По другој колони;
iii. По трећој врсти.

3. Користећи Крамерове формуле рјешити систем једначина

i. $x - 2y + z = 1 \wedge 2x + y - z = 2 \wedge x + y + 2z = 3$;
ii. $2x + 3y + z = -1 \wedge x - 2y + 3z = 0 \wedge -3x + y + 2z = 1$;
iii. $3x + 4z = 2 \wedge 2y - 5x = 1 \wedge 3z + 3y = 0$.

4. Рјешити и дискутовати систем једначина

i. $mx + 2y = 3 \wedge 2x + 3z = 1 \wedge x - 2y + nz = 2$;
ii. $-2x + 2y + z = 1 \wedge x - 2y + 2z = -2 \wedge x + y + kz = 3$;
iii. $px + y - z = 1 \wedge x - py + z = 2 \wedge -x + y + pz = p$.

5. Рјешити једначине

$$\begin{vmatrix} x^2 & 4 & 9 \\ x & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} x-2 & 1 & -1 \\ -1 & x+2 & 1 \\ -1 & x & -1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} -2 & 8 & x+3 \\ 1 & 6 & 3 \\ -1 & 2x & x \end{vmatrix} = 0$$

6. Не израчунавајући је, доказати да је вриједност детерминанте нула

$$\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} y-z & z-x & x-y \\ z & x & y \\ y & z & x \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} b-c & b+c & b \\ c-a & c+a & c \\ a-b & a+b & a \end{vmatrix}$$

7. Без директног израчунавања доказати

i. $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)$;

ii. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda & \lambda^2 & \lambda^3 \\ \lambda^2 & \lambda^4 & \lambda^6 \end{vmatrix} = \lambda^4(\lambda+1)(\lambda-1)^3$;

iii. $\begin{vmatrix} 2x+y+z & y & z \\ x & x+2y+z & z \\ x & y & x+y+2z \end{vmatrix} = 2(x+y+z)^3$.

8. Доказати да је $a + b + c + x + y + z$ фактор детерминанте

$$\begin{vmatrix} a+x & b+y & c+z \\ b+x & c+y & a+z \\ c+x & a+y & b+z \end{vmatrix}$$

и одредити остале факторе.

9. Провјерити идентитет

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ -1 & x & -x^2 & x^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_0x+a_1 & a_1x+a_2 & a_2x+a_3 \\ a_1x+a_2 & a_2x+a_3 & a_3x+a_4 \\ a_2x+a_3 & a_3x+a_4 & a_4x+a_5 \end{vmatrix}.$$

10. Провјерити идентитет

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b & c \\ a & b & c & x & y & z \\ 0 & -c & b & 0 & z & -y \\ c & 0 & -a & -z & 0 & x \\ -b & a & 0 & y & -x & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

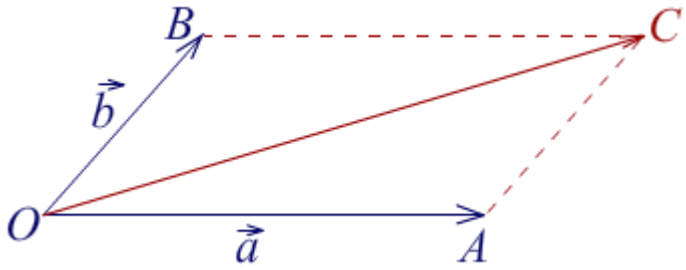
16. Вектори

У геометрији и физици појављују се величине разних врста, које можемо класификовати према броју података којима су одређене. **Скалари** су величине које су одређене само једним бројем, као што су маса, температура, јачина струје. **Вектори** су величине одређене са три броја, односно интензитетом, правцем и смјером, као што су вектор положаја, брзина, сила, или јачина електричног поља. Још сложеније величине су матрице и тензори.

Векторе обично означавамо стрелицом изнад имена, нпр. $\vec{a}$, или масним словом $\boldsymbol{a}$, а њихов интензитет са $|\vec{a}|$, једнставно $\bar{a}$, или a. У основној школи и у нижим разредима средње школе користили смо тзв. **симболички метод**, приказивања вектора непосредно на основу дефиниција алгебарских операција на њима, не позивајући се ни на какав координатни систем. Овдје ћемо једнако користити и **координатни метод**, представљајући векторе уређеним низовима њихових пројекција (a_1, a_2, a_3) на координатне осе неког система. Ове пројекције се у математичкој литератури уобичајено називају **координате вектора**, у физици се називају компоненте вектора.

16.1. Основне особине

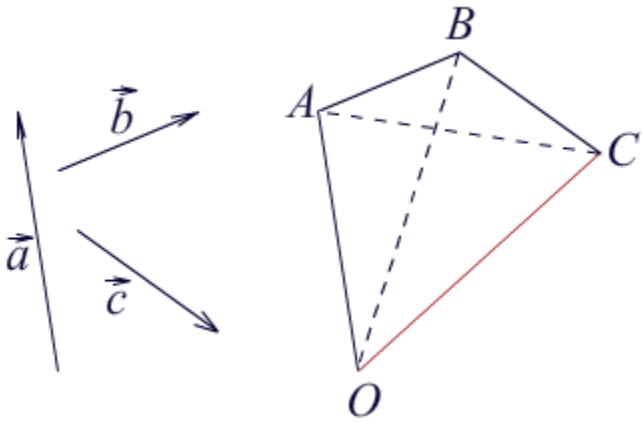
Вектори су **једнаки** када имају исти интензитет, правац и смијер. Отуда познато „правило паралелограма“ за сабирање вектора. На слици десно, вектор $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ и вектор $\overrightarrow{AC}$ су једнаки, јер као странице паралелограма, паралелни су и имају исту дужину. Такође



$\vec{a}=\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{BC}$, па је збир $\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}$. Из истог видимо да је $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$, тј. да је сабирање вектора **комутативно.**

Да је сабирање вектора и **асоцијативно**, тј. да је за свака три вектора важи

$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$$



видимо са слике лијево.

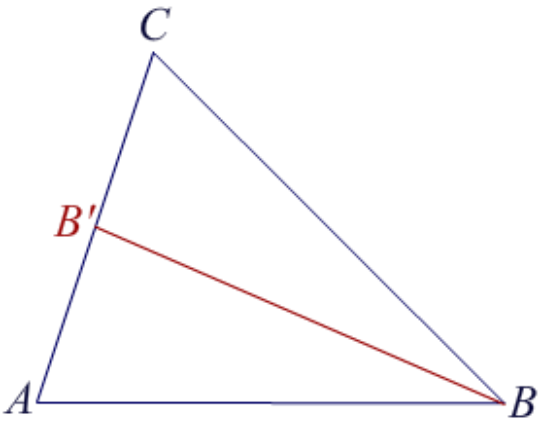
Вектор $\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}$, па је вектор $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}$.

Са друге стране, имамо $\vec{b}+\vec{c}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$, па је $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}$.

Закони сабирања вектора су слични законима сабирања бројева.

Примјер 16.1.1.
Изразити тежишнице троугла помоћу вектора страница троугла и показати да је њихов збир нула.

Рјешење: На слици доле, имамо троугао *ABC* и његову тежишницу *BB'*. Тачка *B'*



је средина странице AC. Имамо

$$\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB'}$$
$$\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB'}$$

па сабирањем добијамо

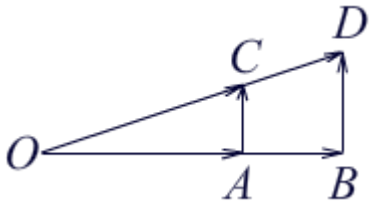
$$2\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC},$$

јер је збир $\overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{CB'} = 0$. Према томе $\overrightarrow{BB'} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC})$. Аналогно добијамо за остале тежишнице: $\overrightarrow{AA'} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$ и $\overrightarrow{CC'} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB})$. Отуда $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \frac{1}{2}\left((\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB})\right) = \frac{1}{2}\left((\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}) + (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB})\right) = \frac{1}{2}(\vec{0} + \vec{0}) = 0$, што је и требало показати. ♦

Сада ћемо показати да сабирање вектора у односу на **множење вектора скаларом** има особину **дистрибуције**. Другим рјечима да, за све скаларе k и l, и све векторе $\vec{a}$ и $\vec{b}$ важе једнакости

$$k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b} \text{ и } (k + l)\vec{a} = k\vec{a} + l\vec{a}.$$

На следећој слици имамо $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OB} = k\vec{a}$, $\overrightarrow{BD} = k\vec{b}$, гдје је $k > 1$. За $0 < k < 1$, био би исти следећи доказ, али би на датој слици, BD било између O и AC. За $k < 0$, имали би слично, али са BD у продужетку лијево и од AC и од O.

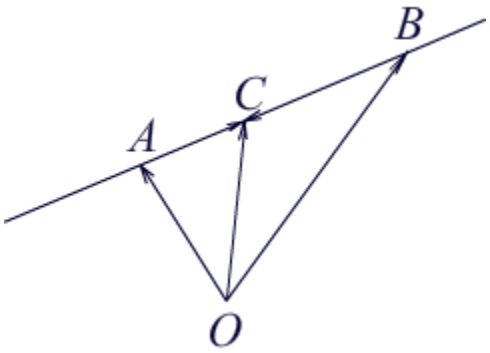


Дакле, на слици видимо да су троуглови OAC и OBD слични, а тачке O, C, D леже на истој правој, те да је $\overrightarrow{OD} = k \cdot \overrightarrow{OC}$. Међутим, имамо $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$, $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BD} = k\vec{a} + k\vec{b}$. Дакле $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$.

Како вектори $k\vec{a}$ и $l\vec{a}$ имају исти правац, слиједи и $(k + l)\vec{a} = k\vec{a} + l\vec{a}$. Множење вектора скаларом је дистрибутивно.

Ако је O тачка простора, онда свакој тачки A тог простора припада потпуно одређен вектор $\overrightarrow{OA}$, који зовемо **вектор положаја**, или **радијус вектор** тачке A у односу на тачку O.

Ако су *A*, *B* и *C* три тачке једне праве (*A* ≠ *B*), кажемо да тачка *C* дијели дуж *AB* **у размјери** λ ($\lambda \in \mathbf{R}$), ако је $\overrightarrow{AC} = \lambda \cdot \overrightarrow{BC}$.



На слици лијево имамо радијус векторе:
$\overrightarrow{OA} = \vec{r}_A$, $\overrightarrow{OB} = \vec{r}_B$, $\overrightarrow{OC} = \vec{r}_C$.

Како је $\overrightarrow{AC} = \lambda \cdot \overrightarrow{BC}$, биће
$\vec{r}_C - \vec{r}_A = \lambda(\vec{r}_C - \vec{r}_B)$, односно
$\vec{r}_C - \lambda\vec{r}_C = \vec{r}_A - \lambda\vec{r}_B$, а отуда
$\vec{r}_C(1-\lambda) = \vec{r}_A - \lambda\vec{r}_B$. Коначно, имамо

$\vec{r}_C = \dfrac{\vec{r}_A - \lambda\vec{r}_B}{1-\lambda}$. На слици је $\lambda < 0$, јер је тачка *C* између тачака *A* и *B*. Тада су вектори $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BC}$ супротног смијера. Када би тачка *C* била ван дужи *AB*, тада би вектори $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BC}$ били истог смијера и број λ би био позитиван. У првом случају кажемо да тачка *C* дијели дуж *AB* изнутра, у другом извана. Посебно, ако је тачка *C* на средини дужи *AB* биће $\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{BC}$, тј. λ = -1, па је $\vec{r}_C = \dfrac{1}{2}(\vec{r}_A + \vec{r}_B)$, а то је радијус вектор средишта дужи *AB*.

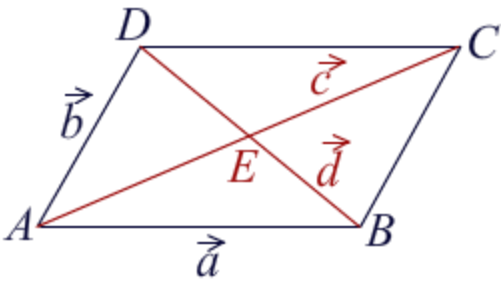
Примјер 16.1.2.
Доказати да се све три тежишнице троугла сјеку у једној тачки, која сваку од тих тежишница дијели у размјери -2.

Рјешење: Нека је *D* средина странице *BC* троугла *ABC*. Њен радијус вектор је $\vec{r}_D = \dfrac{1}{2}(\vec{r}_B + \vec{r}_C)$. Нека је *L* тачка која изнутра дијели тежишницу *AD* у омјеру λ = -2.

Тада је $\vec{r}_L = \dfrac{\vec{r}_A - \lambda\vec{r}_D}{1-\lambda} = \dfrac{\vec{r}_A + 2\vec{r}_B}{3} = \dfrac{\vec{r}_A + 2\cdot\frac{1}{2}(\vec{r}_B + \vec{r}_C)}{3} = \dfrac{\vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C}{3}$. Ако су *M* и *N* тачке које дијеле тежишнице *BE* и *CF* у размјери λ = -2, имамо слично претходном $\vec{r}_M = \vec{r}_N = \dfrac{1}{3}(\vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C)$. Због једнакости $\vec{r}_L = \vec{r}_M = \vec{r}_N$, ради се о истој тачки *L* = *M* = *N*, коју означавамо са *T* и називамо тежиште троугла ABC.♦

Примјер 16.1.3.
Доказати да се дијагонале паралелограма полове.

Доказ: На слици доле је паралелограм *ABCD*, чије дијагонале *AC* и *BD* се сјеку



у тачки E. Ако је $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AD}$, $\vec{c}=\overrightarrow{AC}$ и $\vec{d}=\overrightarrow{DB}$, тада је $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{d}=\vec{a}-\vec{b}$. Вектори $\overrightarrow{AE}$ и $\vec{c}$ су колинеарни, као и $\overrightarrow{EB}$ и $\vec{d}$, па је $\overrightarrow{AE}=m\cdot\vec{c}$, $\overrightarrow{EB}=n\cdot\vec{d}$. Из, $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EB}=\vec{a}$, тј. $m\vec{c}+n\vec{d}=\vec{a}$, добијамо $m(\vec{a}+\vec{b})+n(\vec{a}-\vec{b})=\vec{a}$, или $(\vec{a},\vec{b}\neq\vec{0})$

$(m+n-1)\vec{a}+(m-n)\vec{b}=\vec{0}$. Отуда $m+n-1=0$ и $m-n=0$, те $m=n=\frac{1}{2}$. Дакле,

$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\vec{c}$ и $\overrightarrow{EB}=\frac{1}{2}\vec{d}$, што је и требало доказати.♦

Линеарно зависни вектори су два **колинеарна** вектора (који имају исти правац), или три **компланарна** вектора (леже у истој равни), или било која четири вектора у 3-D простору. Прецизније речено, линеарно су зависни вектори $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$, …, $\overrightarrow{a_n}$, гдје је *n* природан број, ако и само ако једначина

$$\beta_1\overrightarrow{a_1}+\beta_2\overrightarrow{a_2}+\ldots+\beta_n\overrightarrow{a_n}=0$$

има **нетривијално** (различито од $\beta_1=\beta_2=\ldots=\beta_n=0$) рјешење по непознатима бета.

Задаци 16.1.4. Доказати помоћу вектора .
1. Ако су *A, B, C* и *D* било које четири тачке простора, а *K, L, M* и *N* средине дужи редом *AB, BC, CD* и *DA*, тада је *KLMN* паралелограм.

2. Нека су *D* и *E* средине страница *AB* и *AC* троугла *ABC*. Доказати да је *DE*||*BC* и $2\cdot\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{BC}$, тј. да је средња линија троугла паралена основици и једнака њеној половини.

3. Доказати да је $\overrightarrow{TA}+\overrightarrow{TB}+\overrightarrow{TC}=0$, ако је *T* тежиште троугла *ABC*.

4. Ако је *T* тежиште троугла *ABC*, а тачка *M* произвољна тачка простора, доказати да је $3\overrightarrow{MT}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$.

5. Доказати да је средња линија трапеза паралелна основицама и једнака половини њиховог збира.

6. Нека су $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$ странице правоуглог шестоугла *ABCDEF*. Одредити векторе $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{FA}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{FC}$, $\overrightarrow{BE}$.

7. Тетраедар ABCD је разапет векторима $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$ и $\overrightarrow{AD}=\vec{c}$. На ивици C је тачка M, тако да је $CM : MD = 4 : 3$. Тачка P је средина странице BC. Изразити вектор $\overrightarrow{MP}$ помоћу датих вектора.

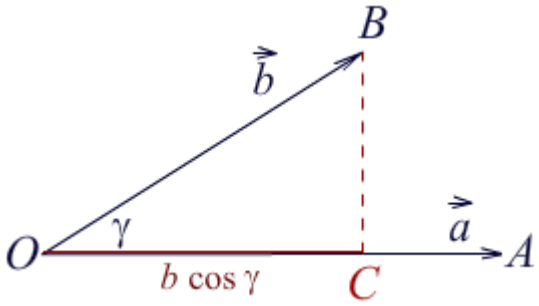
8. У тространој пирамиди $ABCA'B'C'$ дати су вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AA'}$. Наћи вектор $\overrightarrow{AG'}$, гдје је G' тежиште стране $A'B'C'$.

16.2. Скаларни производ вектора

Скаларни производ вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ је скалар

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|a|\cdot|b|\cdot\cos\angle(\vec{a},\vec{b}).$$

Када су вектори међусобно окомити, њихов скараларни производ је нула, јер је $\cos 90°=0$. Када су вектори истог правца, тада је $\vec{a}\cdot\vec{b}=|a|\cdot|b|$, јер је $\cos 0°=0$, а ако су супротног биће $\vec{a}\cdot\vec{b}=-|a|\cdot|b|$, јер је $\cos 180°=-1$.



На слици десно је ортогонална, окомита пројекција вектора $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$ на вектор $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$. Из правоуглог троугла OBC налазимо дужину пројекције $OB=|\vec{b}|\cos\gamma$. Према томе, скаларни производ вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ је производ дужина ортогоналне пројекције једног вектора на други и другог вектора.

Скаларно множење вектора је комутативно, али није асоцијативно.

Примјер 16.2.1.
Помоћу скаларног производа вектора доказаћемо косинусну теорему.

Нека су $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ странице произвољног троугла, тако да је $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$. Квадрирањем добијамо $\vec{c}^{\,2}=(\vec{a}-\vec{b})^2=\vec{a}^{\,2}-2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^{\,2}$, тј. $c^2=a^2+b^2-2ac\cos\gamma$. Аналогно добијамо за остале двије странице. Посебно, ако је троугао правоугли и $\gamma = 90°$, тада је $\cos\gamma=0$, па добијамо Питагорину теорему. ♦

Примјер 16.2.2.
Помоћу скаларног производа ћемо доказати да се све три висине троугла сјеку у једној тачки.

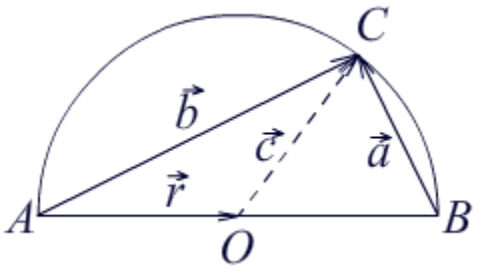
Нека из тјемена *C* троугла *ABC* полазе вектори страница $\vec{a} = \overrightarrow{CA}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{CB}$, и вектор $\vec{v} = \overrightarrow{CH}$ чији врх је тачка *H*, пресјек висина спуштених из *A* и *B* на супротне странице. Треба показати да је вектор $\vec{v}$ окомит на вектор $\vec{a} - \vec{b} = \overrightarrow{AB}$.

По претпоставци је $\vec{b} \perp \overrightarrow{BH}$ и $\perp \overrightarrow{AH}$, тј. $\vec{b}\cdot(\vec{v}-\vec{a}) = 0$ и $\vec{a}\cdot(\vec{v}-\vec{b}) = 0$. Одузимањем налазимо $\vec{b}\cdot(\vec{v}-\vec{a}) - \vec{a}\cdot(\vec{v}-\vec{b}) = 0$, тј. $\vec{b}\cdot\vec{v} - \vec{b}\cdot\vec{a} - \vec{a}\cdot\vec{v} + \vec{a}\cdot\vec{b} = 0$, односно $\vec{v}\cdot(\vec{b}-\vec{a}) = 0$. Дакле, вектор $\vec{v}$ је заиста окомит на $\vec{a} - \vec{b}$.♦

Примјер 16.2.3.
Помоћу скаларног производа доказаћемо да су дијагонале ромба међусобно окомите.

Знамо да су сусједне странице ромба на векторима $\vec{a}$ и $\vec{b}$ истих дужина ($|\vec{a}| = |\vec{b}|$). Зато, за дијагонале ромба $\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{a} - \vec{b}$ вриједи $(\vec{a} + \vec{b})\cdot(\vec{a} - \vec{b}) = a^2 - b^2 = 0$. Према томе, дијагонале су окомите.♦

Примјер 16.2.4.
Помоћу скаларног производа доказати да је периферни угао над пречником прав.



На слици лијево, вектори $\vec{c}$ и $\vec{r}$ имају једнаку дужину (интензитет). Отуда $\vec{a} = \vec{c} - \vec{r}$, $\vec{b} = \vec{c} + \vec{r}$, па квадрирањем и сабирањем добијамо $a^2 + b^2 = 2c^2 + 2r^2 = 4r^2 = (2r)^2$, тј. $a^2 + b^2 = (2r)^2$. Дакле, троугао *ABC* је правоугли, са правим углом у тјемену *C*.♦

Примјер 16.2.5.
Помоћу скаларног производа доказаћемо Херонов образац за израчунавање површине троугла $P_\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, гдје су *a*, *b* и *c* дужине страница, а $s = \dfrac{a+b+c}{2}$ полуобим троугла.

Тјеме *C* датог троугла је врх вектора страница $\vec{a}$ и $\vec{b}$ које граде угао γ. Према томе, вектор теће стране је $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$. Скаларним квадрирањем слиједи $c^2 = a^2 + b^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b}$, па $\vec{a}\cdot\vec{b} = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2}$. Дакле, $P_\Delta = \dfrac{1}{2}ab\sin\gamma = \dfrac{1}{2}\sqrt{(ab)^2\sin^2\gamma} = \dfrac{1}{2}\sqrt{a^2b^2(1-\cos^2\gamma)}$ $= \dfrac{1}{2}\sqrt{a^2b^2 - (ab\cos\gamma)^2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{a^2b^2 - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{a^2b^2 - \dfrac{1}{4}(a^2+b^2-c^2)^2} =$ сређивањем $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.♦

Примјер 16.2.6.

Помоћу скаланог производа налазимо дужину $t_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$ тежишнице *AD* троугла ABC, чије су странице дужина $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$.

Лако налазимо да је $2\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$. Скаларним квадрирањем и сабирањем добијамо $4\overrightarrow{AD}^2 + \overrightarrow{BC}^2 = 2\overrightarrow{AB}^2 + 2\overrightarrow{AC}^2$, тј. $4t_a^2 + a^2 = 2c^2 + 2b^2$, а отуда $t_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$, што смо и требали наћи. ♦

У **Декартовом правоуглом координатном систему** *OXYZ*, почетак вектора је исходиште *O*, а врх вектора $\vec{a}(a_x, a_y, a_z)$ је тачка чије су отрогоналне, окомите пројекције на координатен осе апсцису, ординату и апликату скалари редом a_x, a_y и a_z. **Ортови** $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ су јединични вектори координатних оса, па је

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} \text{ и } \vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}.$$

Скаларни производ овако писаних вектора је

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z,$$

јер је производ орта са самим собом 1, а са другим ортом 0. Према томе, угао између два вектора је

$$\cos\angle(\vec{a},\vec{b}) = \frac{a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z}{|a|\cdot|b|}.$$

Примјер 16.2.7.

Дати су вектори $\vec{a}$ = (1, -2, 3), $\vec{b}$ = (-2, 3, 4) и $\vec{c}$ = (8, -13, -6). Доказати да су они компланарни, па наћи њихову линеарну зависност.

Рјешење: Ако постоји рјешење једначине $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$ онда се вектор $\vec{c}$ може линеарно изразити помоћу вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$, што значи да сва три вектора леже у истој равни (компланарни су). Отуда, имамо

(8, -13, -6) = *x*(1, -2, 3) + *y*(-2, 3, 4), што значи

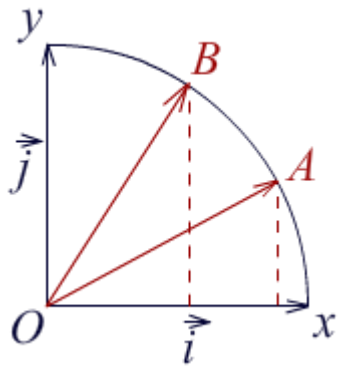
$$\begin{cases} 8 = x - 2y \\ -13 = -2x + 3y \\ -6 = 3x + 4y \end{cases}$$

множећи прву једначину са 2 и сабирајући је са другом, слиједи 3 = -*y*, тј. *y* = -3. Уврштавањем овог резултата у сваку од три једначине, увијек добијамо *x* = 2. Према томе, дата три вектора су компланарни, а њихова линеарна веза је

$$\vec{c} = 2\vec{a} - 3\vec{b}.\blacklozenge$$

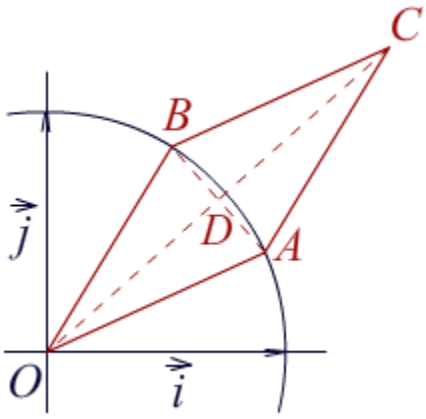
Примјер 16.2.8.
Помоћу скаларног производа ћемо доказати познату адициону формулу за разлику косинуса $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$.

Нека су $\vec{\imath}$ и $\vec{\jmath}$ два јединична међусобно окомита вектора, као што су ортови апсцисе и ординате, на слици десно. Радијус вектори $\overrightarrow{r_A}=\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{r_B}=\overrightarrow{OB}$ чине с вектором $\vec{\imath}$ углове α и β. Тада је очигледно $\overrightarrow{r_A}=\cos\alpha\vec{i}+\sin\alpha\vec{j}$ и $\overrightarrow{r_B}=\cos\beta\vec{i}+\sin\beta\vec{j}$. Скаларни производ тих вектора је $\overrightarrow{r_A}\cdot\overrightarrow{r_B}=(\cos\alpha\vec{i}+\sin\alpha\vec{j})\cdot(\cos\beta\vec{i}+\sin\beta\vec{j})$, тј. $1\cdot1\cdot\cos(\beta-\alpha)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$, односно $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$, што је и требало доказати.♦



Примјер 16.2.9.
Помоћу скаларног производа ћемо доказати тригонометријску формулу за трансформацију збира косинуса у производ $\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$.

Нека су $\overrightarrow{r_A}=\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{r_B}=\overrightarrow{OB}$ јединични вектори који са ортовима $\vec{\imath}$ и $\vec{\jmath}$ чине углове α и β, као на слици лијево. Дијагонале ромба *OACB* се сијеку у тачки *D*. Из правоуглог троугла *OAD* слиједи $OD=\cos\frac{\beta-\alpha}{2}$. Тада је OC = 2, $OD=2\cos\frac{\beta-\alpha}{2}$ = због парности = $2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$. Очигледно је $\vec{i}\cdot\overrightarrow{r_A}=\cos\alpha$ и $\vec{i}\cdot\overrightarrow{r_B}=\cos\beta$, па сабирањем добијамо $\cos\alpha+\cos\beta=\vec{i}\cdot\overrightarrow{r_A}+\vec{i}\cdot\overrightarrow{r_B}=\vec{i}\cdot(\overrightarrow{r_A}+\overrightarrow{r_B})=$



$=1\cdot|\overrightarrow{r_A}+\overrightarrow{r_B}|\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=|\overrightarrow{OC}|\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$, што је и требало доказати.♦

Задаци 16.2.10.
1. Израчунати интензитет датог вектора, ако су $\overrightarrow{e_1}$ и $\overrightarrow{e_2}$ ортогонални ортови

а) $\vec{a}=6\vec{e_1}-8\vec{e_2}$; **б)** $\vec{b}=5\vec{e_1}-12\vec{e_2}$.

2. Израчунати интензитет збира и разлике вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$, ако је
а) $|\vec{a}|=4$, $|\vec{b}|=5$, $\angle(\vec{a},\vec{b})=\pi/6$; **б)** $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=7$, $\angle(\vec{a},\vec{b})=\pi/4$.

3. Израчунати дужине дијагонала паралелограма, ако су му странице вектори $\vec{a}=3\vec{m}+4\vec{n}$ и $\vec{b}=2\vec{m}-5\vec{n}$, гдје је $|\vec{m}|=5$, $|\vec{n}|=6$ и $\angle(\vec{m},\vec{n})=\pi/3$.

4. Дата су тјемена троугла ABC у Декартовом правоуглом координатном систему. Наћи углове троугла
а) $A(1, 1, 1)$, $B(2, -1, 3)$ $C(-1, -2, -3)$; **б)** $A(-1, 2, 1)$, $B(2, -3, 1)$ $C(-1, 2, -3)$.

5. Дата су три узастопна тјемена паралелограма A, B и C. Одредити координате четвртог тјемена D и угао између дијагонала $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$
а) $A(1, 2, 3)$, $B(2, -3, 1)$ и $C(-3, -2, -1)$; **б)** $A(-1, 3, 2)$, $B(-3, 2, 1)$ и $C(-2, 2, -3)$.

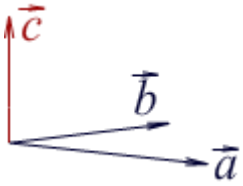
6. Дати су вектори $\vec{a}=6\vec{i}+\vec{j}-3\vec{k}$, $\vec{b}=2\vec{j}-2\vec{k}$ и $\vec{c}=24\vec{i}-2\vec{j}-6\vec{k}$.
a) Показати да су они компланарни, па наћи њихову линеарну зависност.
b) Одредити λ тако да вектори $\vec{a}+\lambda\vec{b}$ и $\vec{c}$ буду ортогонални.

7. Доказати да је троугао $A(2, 4, 5)$, $B(-3, 2, 2)$, $C(-1, 0, 3)$ правоугли. Наћи његове оштре углове.

8. Дат је троугао чија су тјемена $A(1, -3, 0)$, $B(2, -1, 1)$, $C(0, 1, 3)$.
a) Наћи угао између медијане $\overrightarrow{BD}$ и странице $\overrightarrow{AC}$.
b) Наћи угао између медијане $\overrightarrow{AE}$ и странице $\overrightarrow{BC}$.

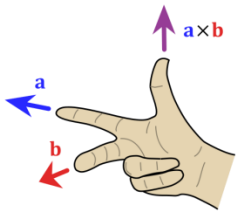
16.3. Векторски производ вектора

Векторски (ваљски) **производ вектора** $\vec{a}$ и $\vec{b}$ је вектор чији је интензитет једнак површини паралелограма који формирају дати вектори, правац му је окомит на раван датих вектора, а смијер одређујемо **правилом десне руке**, односно правилом десног завртња:



$$\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$$
$$|\vec{c}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\angle(\vec{a},\vec{b})$$

Када прсте десне руке поставимо у правцу (ротације) множења вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ тада палац показује смјер вектора производа. Слично, ако у равни вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ завртимо шераф, он ће се кретати у правцу вектора резултата.

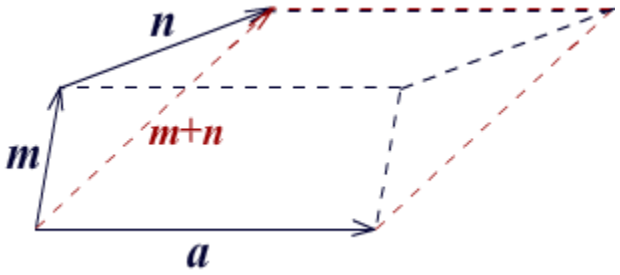


У том смислу дефинишемо **десни систем координата** у којем производ вектора x и y оса даје смјер вектора z-осе.

Увијек је $\vec{i}\times\vec{i}=\vec{j}\times\vec{j}=\vec{k}\times\vec{k}=\vec{0}$. Међутим, у десном Декартовом правоуглом систему је циклично

$$\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k},\ \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i},\ \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}\ \text{ и }\ \vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j},\ \vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i},\ \vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k}.$$

Дакле, не важи закон комутације, већ **антикомутације** $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$, али важи закон дистрибуције
$\vec{a}\times(\vec{m}+\vec{n})=(\vec{a}\times\vec{m})+(\vec{a}\times\vec{n})$.



Наиме, на слици десно се види да је збир плаво уоквирених површина једнак површини паралелограма црвених ивица.

Према томе, имамо

$$\vec{a}\times\vec{b}=(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k})\times(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k})\ =$$
$$=\ a_x\vec{i}\times(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k})+a_y\vec{j}\times(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k})+a_z\vec{k}\times(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k})$$
$$=\ (a_xb_y\vec{k}-a_xb_z\vec{j})+(-a_yb_x\vec{k}+a_yb_z\vec{i})+(a_zb_x\vec{j}-a_zb_yi)$$
$$=\ (a_yb_z-a_zb_y)\vec{i}-(a_xb_z-a_zb_x)\vec{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\vec{k}.$$

Другим рјечима

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}.$$

Примјер 16.3.1.
Дати су вектори $\vec{a}=\vec{\imath}+2\vec{\jmath}-3\vec{k}$, $\vec{b}=3\vec{\imath}+2\vec{\jmath}-\vec{k}$ и $\vec{c}=-2\vec{\imath}-2\vec{\jmath}+2\vec{k}$.

a) Наћи угао γ између вектора $\vec{c}$ и равни вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$.
b) Наћи површину троугла којег формирају врхови вектора.

Рјешење: а) Угао γ је комплементаран са $\angle(\vec{c},\ \vec{a}\times\vec{b})$. Како је

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&2&-3\\3&2&-1\end{vmatrix}=4\vec{\imath}+8\vec{\jmath}-4\vec{k},$$

то је $\vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})=-8-16-8=-32$. Према томе

$$\cos\angle(\vec{c},\ \vec{a}\times\vec{b}) = \frac{|\vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})|}{|\vec{c}|\cdot|\vec{a}\times\vec{b}|} = \frac{32}{\sqrt{4+4+4}\cdot\sqrt{16+64+16}} = \frac{32}{16\sqrt{6}},$$

па је $\angle(\vec{c},\ \vec{a}\times\vec{b}) = 35{,}264° = 35°\ 15'\ 50''$. Тражени угао $\gamma = 54°\ 34'\ 10''$. b) То је троугао са тјеменима $A(1, 2, -3)$, $B(3, 2, -1)$, $C(-2, -2, 2)$, чија је површина

$$P_{ABC} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2}\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 0 & 2\\ -3 & -4 & 5\end{vmatrix},$$

јер је $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \vec{b} - \vec{a} = 2\vec{i} + 2\vec{k} = (2, 0, 2)$, и слично за $\overrightarrow{AC}$. Отуда

$$P_{ABC} = \frac{1}{2}|8\vec{i} - 16\vec{j} - 8\vec{k}| = \frac{1}{2}\sqrt{64+256+64} = 9{,}8.\ \blacklozenge$$

Мјешовити производ вектора је скаларни производ вектора и векторског производа два вектора, тј. $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$.

Резултат је скалар, запремина паралелопипеда над векторима $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Наиме, база поменутог паралелопида има површину $\vec{b}\times\vec{c}$, а њена висина је $|\vec{a}|\cos\varphi$, гдје је φ угао између висине на базу и вектора $\vec{a}$.

Непосредна посљедица ове интерпретације је

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a}) = \vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}),$$

тј. мјешовити производ вектора је инваријантан при цикличној пермутацији својих фактора. Пошто је овдје важан само редосљед вектора, овај производ се често означава и са $[\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}]$.

Када мјешовити производ изражавамо помоћу координата, имамо

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) &= a_x(\vec{b}\times\vec{c})_x + a_y(\vec{b}\times\vec{c})_y + a_z(\vec{b}\times\vec{c})_z =\\ &= a_x(b_yc_z - b_zc_y) - a_y(b_xc_z - b_zc_x) + a_z(b_xc_y - b_yc_x),\end{aligned}$$

што се може написати и у облику детерминанте

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = \begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}.$$

Двоструки векторски производ је векторски производ вектора и векторског производа два вектора, тј. $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$.

Према дефинцији векторског производа, овај вектор је нормалан на $\vec{b}\times\vec{c}$, а овај на векторима $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Зато двоструки векторски производ лежи у равни коју образују вектори $\vec{b}$ и $\vec{c}$, па је облика $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=\alpha\vec{b}+\beta\vec{c}$.

Развијајући га по координатама, за прву добијамо

$$\left(\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})\right)_x = a_y(\vec{b}\times\vec{c})_z - a_z(\vec{b}\times\vec{c})_y = \\ = a_y(b_xc_y - b_yc_x) - a_z(b_zc_x - b_xc_z).$$

Овоме изразу додајемо и одузимамо $a_xb_xc_x$, па добијамо

$$\left(\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})\right)_x = b_x(a_xc_x + a_yc_y + a_zc_z) - c_x(a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z) = \\ = b_x(\vec{a}\cdot\vec{c}) - c_x(\vec{a}\cdot\vec{b}).$$

Аналогно радимо са остале двије кооридната. Добијамо

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b}).$$

Задаци 16.3.2.

1. Када вектор $\vec{a}+\vec{b}$ дјели угао између вектора сабирака на два једнака дјела?

2. Када је $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$?

3. Написати $\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a}$ у облику једног векторског производа.

$[(\vec{a}\text{-}\vec{c})\times(\vec{b}\text{-}\vec{a})]$

4. Показати да је $(\vec{a}-\vec{b})\times(\vec{a}+\vec{b}) = 2(\vec{a}\times\vec{b})$ и објаснити геометријски смисао.

5. Израчунати запремину тетраедра чија су тјемена *A*(0, 1, -1), *B*(2, -1, 1), *C*(5, 1, 2), *D*(-1, 2, 4).

5. Колики угао заклапају вектори $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{a}$ и $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{b}$, ако вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заклапају угао γ ?

6. Дата су три некомпланарна вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, који образују десни триједар. Какву орјентацију ће имати триједар вектора $\vec{b}+\vec{c}$, $\vec{c}+\vec{a}$, $\vec{a}+\vec{b}$? У каквом односу стоје запремине паралелопипеда конструисаних над прва три и над друга три вектора?

[Због $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}>0$ је $\left((\vec{b}+\vec{c})\times(\vec{c}+\vec{a})\right)\cdot(\vec{a}+\vec{b})>0$,
тј. оба су десне орјентације. У другом случају
запремина је два пута већа.]

7. Изразити помоћу једног четвороструког производа следеће:

a) $(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d})-\vec{c}\times\left((\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{d}\right)$,

b) $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d})-\vec{c}\cdot\left((\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{d}\right)$.

[Користимо смјену $\vec{v}=\vec{a}\times\vec{b}$, добијамо:
a) $\vec{c}(\vec{v}\cdot\vec{d})-\vec{v}(\vec{c}\cdot\vec{d})=\left((\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}\right)\times\vec{d}$;
b) $2(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d})$]

8. Рјешити векторску једначину $\vec{a}+\vec{b}\times\vec{x}=\lambda\vec{x}$, гдје су $\vec{a}$ и $\vec{b}$ познати вектори, а λ познати скалар.

[Множимо једначину скаларно са $\vec{b}$, добијамо $\vec{a}\cdot\vec{b}=\lambda\vec{x}\cdot\vec{b}$.
Множимо дату једначину и векторски истим, па
представимо двоструки векторски производ .
Из саме једначине узмемо сабирак са x-ом.
Коначно, $\vec{x}=\dfrac{\lambda}{\lambda^2+b^2}\left(\vec{a}+\dfrac{1}{\lambda}\vec{b}\times\vec{a}+\dfrac{1}{\lambda^2}(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{b}\right)$]

17. Матрице

Матрица је правоугаона таблица бројева

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Бројеви a_{ij} се називају **елементи матрице**. Хоризонтални ред матрице се назива **врста**, а вертикални **колона**. Наведена матрица има m врста и n колона, она је **типа**, односно реда $m \times n$. Када је $m = n$ кажемо да је матрица **квадратна**.

Матрице су једнаке ако и само ако су истог типа и ако су им сви одговарајући елементи међусобно једнаки.

17.1. Основне особине

Матрице су **једнаке** ако су им сви одговарајући елементи међусобно једнаки.

У општим разматрањима, матрице често наводимо њиховим именом, елементима и индрексима. На примјер, матрице

$$A = (a_{ij})_{3\times 4} \text{ и } B = (b_{ij})_{3\times 4},$$

су истог типа 3×4. Да би било $A = B$, мора бити $a_{ij} = b_{ij}$ за свако $i = 1, 2, 3$, и $j = 1, 2, 3, 4$. На примјер, матрице

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 5 & -8 & 1 & 4 \\ -6 & 9 & 2 & -5 \\ 7 & 0 & -3 & 6 \end{pmatrix}$$

нису једнаке.

Матрицу **множимо бројем** тако што сваки елеменат те матрце множимо тим бројем. **Збир матрица** истог типа је матрица истог типа чији су елементи једнаки збировима одговарајућих елемената матрица сабирака. Аналогно одузимамо матрице.

Нулта матрица (0) има све елементе једнаке нули. За сваку матрицу A је

$$A - A = 0.$$

Примјер 17.1.1.
Наћи збир $2 \cdot A - 3 \cdot B$ горе наведених матрица.

Рјешење:

$$2\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} - 3\cdot\begin{pmatrix} 5 & -8 & 1 & 4 \\ -6 & 9 & 2 & -5 \\ 7 & 0 & -3 & 6 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4-15 & 2+24 & -3 & -2-12 \\ 9+18 & -4-27 & 2-6 & 15 \\ -8-21 & 6 & 4+9 & 2-18 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -11 & 26 & -3 & -14 \\ 27 & -31 & -4 & 15 \\ -29 & 6 & 13 & -16 \end{pmatrix}.\blacklozenge$$

Множење матрица је дефинисано само ако је број колона прве једнак броју врста друге. Тада се сабирају производи одговарајућих елемената колоне прве и врсте друге матрице да би формирали елемент резултата са индексом те колоне и врсте. Прецизније, производ матрица

$$A = (a_{ij})_{m\times n} \text{ и } B = (b_{ij})_{n\times k}$$

је матрица

$$C = (c_{ij})_{m\times k} = \left(\sum_{l=1}^{n} a_{il}b_{lj}\right)_{m\times k}.$$

Примјер 17.1.2.
Наћи производ матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 & 5 \\ 4 & -3 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Рјешење: $AB =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 & 5 \\ 4 & -3 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2+8+6 & 3-6-3 & -4+4+0 & 5+2+3 \\ 0-4-4 & 0+3+2 & 0-2+0 & 0-1-2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 16 & -6 & 0 & 10 \\ -8 & 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}.\blacklozenge$$

Примјетимо, AB је матрица типа 2×4, док производ BA није дефинисан. Уопште, множење матрица није комутативно. Ако се за неке двије квадратне матрице истог реда ипак деси да је $AB = BA$, тада кажемо да су то **комутативне матрице**. На примјер, матрице $A=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 5 & 9\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 3\end{pmatrix}$ су комутативне јер је

$$AB = BA = \begin{pmatrix}4 & 0\\ 22 & 27\end{pmatrix}.\blacklozenge$$

Поред облих заграда, матрице уоквирујемо и у двоструке равне, или угласте заграде. Тако, претходне матрице можемо писати

$$A=\begin{Vmatrix}4 & 0\\ 5 & 9\end{Vmatrix} \text{ или } B=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 3\end{bmatrix},$$

али није уобичајено мјешати ове ознаке у току истог задатка.

Квадратна матрица која на главној дијагонали има све јединице и све остале елементе нуле, назива се **јединична матрица**. Таква је

$$I_3=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Јединична матрица се може записати у облику $I_n = (\delta ij)$, гдје је

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq k\end{cases}$$

Кронекеров симбол. Множење јединичном матрицом не мјења резултат.

Теорема 17.1.3.
Ако је дефинисано, за множење матрица важе правила

1. AB је матрица;
2. $AB \neq BA$, тј. множење није комутативно;
3. $(AB)C = A(BC)$, тј. множење је асоцијативно;
4. $A(B + C) = AB + AC$, тј. множење је дистрибутивно;
5. $AI = IA = A$, тј. постоји јединична матрица I;
6. $AA^{-1} = A^{-1}A = I$, постоји инверзна матрица.

Помоћу матрица се лакше третирају основни облици система линеарних једначина.

Примјер 17.1.4.
Рјешити систем једначина

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3 \\ 3x_1 + 4x_2 = 5. \end{cases}$$

Помоћу матрица

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix},\ X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \text{ и } B = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

можемо писати $A \cdot X = B$. Ако бисмо имали матрицу A^{-1} (инверзна матрица), која множењем са датом матрицом A даје јединичну матрицу истог реда, тада би множењем дате једнакости с лијева са A^{-1} добили $X = A^{-1} \cdot B$. Управо то добијамо претходно поменутом Гаус-Јордановом елиминацијом. Дакле, трансформишемо [$A \mid I$] u [$I \mid A^{-1}$]

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 & -1/2 \end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3/2 & -1/2 \end{array}\right]$$

Према томе, постоји (инверзна) матрица

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix},$$

таква да је $X = A^{-1} \cdot B$, тј.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6+5 \\ 9/2 - 5/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

односно $x_1 = -1$ и $x_2 = 2$. Рјешење провјеравамо непосредним увртавањем

$$\begin{cases} -1 + 2 \cdot 2 = 3 \\ 3 \cdot (-1) + 4 \cdot 2 = 5 \end{cases}$$

што је тачно.♦

Задаци 17.1.5.

1. Дате су матрице $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix}2 & -3\\ -4 & 5\end{pmatrix}$. Израчунати:

a) $2A$ и $-3B$;
b) $A+2B$ и $4B-3A$;
c) AB и BA.

2. За матрице $P=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ и $Q=\begin{pmatrix}2 & -1 & 3\\ 1 & 3 & -2\end{pmatrix}$ израчунати PQ и QP.

3. Доказати једнакост $A(\alpha)A(\beta)=A(\alpha+\beta)$, гдје је

$$A(x)=\begin{pmatrix}\cos x & -\sin x\\ \sin x & \cos x\end{pmatrix}.$$

4. Ако је

$$A=\begin{pmatrix}0 & -\operatorname{tg}t\\ \operatorname{tg}t & 0\end{pmatrix},$$

провјерити да ли је

$$I+A=\begin{pmatrix}\cos 2t & -\sin 2t\\ \sin 2t & \cos 2t\end{pmatrix}(I-A).$$

5. На основу матричне једначине $AA^{-1}=\mathrm{I}$, тј.

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x & y\\ u & v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

наћи инверзну матрицу A^{-1}.

6. Методом из претходног задатка (3.), наћи инверзну матрицу A^{-1} матрице

$$A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}.$$

7. Дате су матрице $M=\begin{pmatrix}1 & 3 & 3\\ 1 & 4 & 3\\ 1 & 3 & 4\end{pmatrix}$ и $N=\begin{pmatrix}7 & -3 & -3\\ -1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$. Израчунати

a) $2M$ и $-3N$;
b) $M+2N$ и $4N-3M$;

c) MN и NM.

8. Помоћу Гаус-Јорданове елиминације (примјер 17.1.4.) рјешити систем

a) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 4 \\ 3x_1 - 4x_2 = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 3 \\ x_1 - 2x_2 = -4 \end{cases}$

9. Доказати да је

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^5 = 0 .$$

10. Дата је матрица

$$A(x) = \begin{pmatrix} 2-x & x-1 \\ 2(1-x) & 2x-1 \end{pmatrix}.$$

Одредити: **а**) $A(a)A(b)$; **б**) $(A(x))^2$; **в**) $(A(x))^n$, $n \in \mathrm{N}$.

11. Одредити a и b тако да дате матрице буду комутативне:

$$A = \begin{pmatrix} \cos a & -\sin a & 0 \\ \sin a & \cos a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos b & -\sin b \\ 0 & \sin b & \cos b \end{pmatrix}.$$

12. Ако је n природан број доказати да је $A^n = I + n(A - I)$, гдје је

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

17.2. Инверзна матрица

Транспонована матрица A^τ матрице A је матрица чије су врсте замјењене колонама.

Минор матрице је детерминанта сваке њене квадратне подматрице. Ако је дата квадратна матрица реда n, она има миноре реда 1, 2, ..., n. Посебну важност имају њени минори реда $n - 1$, којих има n^2.

Минор реда $n - 1$ елемента a_{ij} квадратне матрице $A = (a_{ij})_n$ је детерминанта подматрице реда $n - 1$ која се добије изостављањем врсте и колоне у којима се налази елеменат a_{ij}. Тај минор означавамо са M_{ij}.

Кофактор (алгебарски комплемент) елемента a_{ij} матрице $A = (a_{ij})_n$ означавамо са A_{ij} и дефинишемо са

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Адјунгована матрица матрице A је састављена од кофактора елемената матрице A и означава се са

$$\text{adj } A.$$

Инверзна матрица матрице A је матрица A^{-1} ако је

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I,$$

гдје је I јединична матрица. За матрицу A кажемо да је **инвертибилна** ако има инверзну матрицу.

Детерминанту квадратне матрице A означавамо са **det *A***. Из особина детерминанти (теорема 15.2.3.) непосредно слиједи:

Теорема 17.2.1.

1. $\det A^{\tau} = \det A$, гдје је A^{τ} транспонована матрица, колоне су замјењене врстама и обрнуто;
2. $\det B = -\det A$, ако је матрица B добијена из матрице A замјеном сусједних врста (колона);
3. $\det B = k \cdot \det A$, ако је матрица B добијена из матрице A множењем једне њене врсте (колоне) бројем k;
4. $\det B = k \cdot \det A$, ако је матрица B добијена тако што су елементима једне врсте (колоне) матрице A додати одговарајући елементи друге врсте (колоне) исте матрице, претходно помножени неким бројем;
5. $\det A = 0$, ако матрица има једну врсту (колону) чији су сви елементи једнаки нули;
6. $\det A = 0$, ако матрица има двије једнаке врсте (колоне);
7. $\det A = 0$, ако матрица има двије пропорционалне врсте (колоне);
8. $\det AB = \det A \det B$, ако су A и B двије квадратне матрице истог реда.

Наравно, у општем случају је: $\det(A + B) \neq \det A + \det B$.

Теорема 17.2.2.
Ако је квадратна матрица A инвертибилна, тада је

$$\det A \neq 0.$$

Доказ: Нека је матрица A инвертибилна, тј. нека постоји (њена инверзна) матрица B таква да је $AB = I$. Тада је $\det AB = \det I$, што значи да је $\det A \det B = 1$. Одавде слиједи да је $\det A \neq 0$.♦

Дакле, ако је детерминанта матрице једнака нули, тада је сигурно да дата матрица нема инверзну матрицу. Обрнуто, ако матрица инвертибилна, тада је њена инверзна матрица јединствена и добија се формулом

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \operatorname{adj} A^{\tau},$$

гдје је A^{τ} транспонована матрица датој.

Примјер 17.2.3.
Наћи инверзну матрицу матрице

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Рјешење: Прво израчунавамо детерминанту дате матрице $\det A =$

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = (16 - 9) - 3 \cdot (4 - 3) + 3 \cdot (3 - 4) = 7 - 3 - 3 = 1 \neq 0.$$

Затим транспонујемо матрицу, замјењујући њене колоне врстама

$$A^{\tau} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

па налазимо свих њених 9 кофактора да би формирали адјунговану (енг. *adjoint*) матрицу (транспоноване)

$$\operatorname{adj} A^{\tau} = \begin{pmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Према томе, тражена инверзна матрица је

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Резултат провјеравамо непосредно матричним множењем

$$A^1 \cdot A = A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \blacklozenge$$

Задаци 17.2.4.

1. Ако је $ad - bc \neq 0$ доказати да је

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

2. Одредити матрице A^2, A^3, A^{-1} и A^{-2}, ако је $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$.

[*Резултат*: $\begin{pmatrix} 16 & -3 \\ -5 & 19 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 54 \\ 90 & -53 \end{pmatrix}$, $\frac{1}{17}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$, $\frac{1}{289}\begin{pmatrix} 19 & 3 \\ 5 & 16 \end{pmatrix}$]

3. Одредити A^{-1}, A^{-2}, B^{-1}, B^{-2}, гдје су

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Провјерити

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{64}\begin{pmatrix} 66 & -14 & 2 & -46 \\ 18 & 2 & -14 & 2 \\ -30 & 18 & 2 & 18 \\ -46 & 2 & 18 & 34 \end{pmatrix}.$$

5. Доказати да је $A^{-1} = B$, за матрице

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -a & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & -a & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & \ldots & a^{n-1} \\ 0 & 1 & a & \ldots & a^{n-2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

6. Нека су A и B квадратне матрице реда n и нека A има инверзну матрицу. Доказати да је $(A + B)\, A^{-1}\, (A - B) = (A - B)\, A^{-1}\, (A + B)$.

7. Провјерити да ли матрице

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$$

имају особине: $A = B^{-1}$, $A^{\tau} = B$, $A^{-1} = A^{\tau}$.

8. Нека је $x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$, $y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$, $z=\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{pmatrix}$ и $A=\begin{pmatrix}1&3&5\\3&5&1\\5&3&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1&2&-3\\-2&3&1\\2&-3&-1\end{pmatrix}$.
Полазећи од једнакости $y = Ax$ и $z = By$, изразити x помоћу z.

9. Полазећи од једнакости $x = Ay$ и $z = By$, тј.

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&4&-4\\-1&4&0\\2&1&-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}\text{ и }\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&-2&1\\2&-3&2\\4&2&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix},$$

изразити x помоћу z.

10. Одредити инверзну матрицу матрице $\begin{pmatrix}1&a&b\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

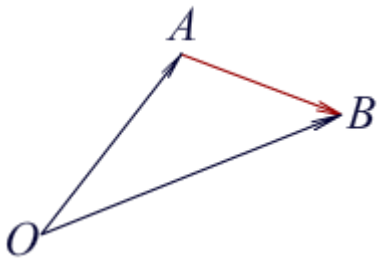
V Координате

Координатна, или **аналитичка геометрија** проучава геометријске фигуре (непразне скупове тачака) алгебарским методама. У средњошколском програму математике се подразумјевају Декартов правоугли систем координата у равни (2-дим) и криве II реда. Први дио тог програма обухвата дефиниције координатног система, тачке и праве, а у другом дијелу се бавимо аналитичком геометријом круга, елипсе, хиперболе и параболе.

Докази који личе на методе координатне геометрије потичу још из периода античке Грчке, али се највећи помак у овој области математике традиционално приписује француском математичару, филозофу и научнику **Декарту** (*René Descartes*, 1596 – 1650). У своме есеју Геометрија (*La Géométrie*, 1637.), на матерњем француском, са много празнина у доказима и много формула, Декарт је објашњавао тада нови инфинитезимални рачун и поставио основе аналитичке геометрије.

18. Тачка и права

Нека су дате двије тачке $A(x_A, y_A, z_A)$ и $B(x_B, y_B, z_B)$. Знамо да су њима дати радијус вектори положаја $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$. Када од врха одузмемо почетак, као на слици десно, добијамо вектор



$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}.$$

Уврштавањем координата слиједи

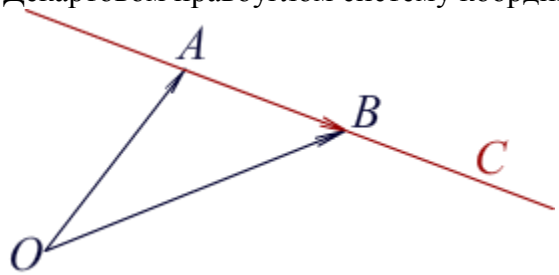
$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\vec{\imath} + (y_B - y_A)\vec{\jmath} + (z_B - z_A)\vec{k}, \text{ или}$$

$$\overrightarrow{AB}(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A).$$

Дужина, интензитет овог вектора је $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}}$, тј.

$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}.$$

То је и формула за растојање између двије тачке $A(x_A, y_A, z_A)$ и $B(x_B, y_B, z_B)$ у Декартовом правоуглом систему координата.



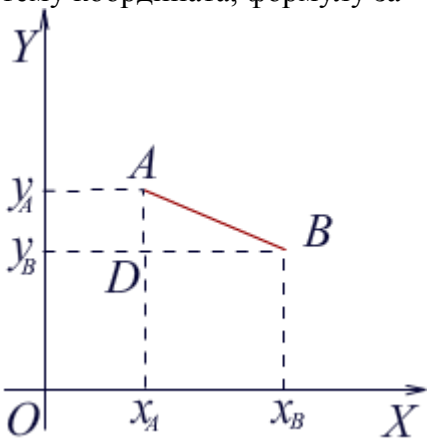
На слици лијево видимо шта се догађа када вектор $\overrightarrow{AB}$ множимо реалним бројем t. Добијамо тачке праве

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + t \cdot \overrightarrow{AB},$$

на којој лежи вектор $\overrightarrow{AB}$. То је правац вектора $\overrightarrow{AB}$.

18.1. Дужина и површина

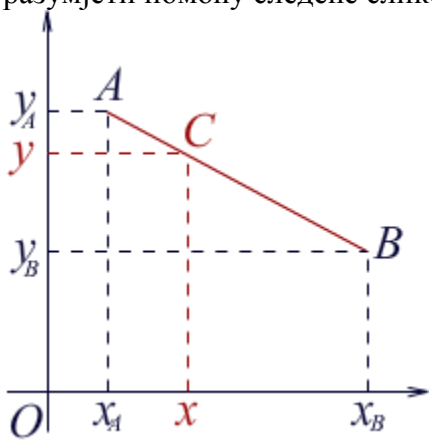
У 2-димензионалном Декартовом правоуглом систему координата, формулу за растојање између двије тачке $A(x_A, y_A)$ и $B(x_B, y_B)$ можемо разумјети и помоћу слике десно. Троугао ABD , гдје је $D(x_A, y_B)$, је правоугли. Дужина AB је хипотенуза, па је



$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}\ .$$

То је и формула за **удаљеност између тачака** $A(x_A, y_A)$ и $B(x_B, y_B)$.

Подјелу дужи у датој размјери можемо разумјети помоћу следеће слике. Тачка $C(x, y)$ је на дужи AB, тако да је



$$AC : CB = m : n.$$

Према Талесовој теореми, у истом односу су и пројекције ових тачака на апсциси (X-оса) и ординати (Y-оса), тј.

$$(x - x_A) : (x_B - x) = m : n\,.$$

Отуда $n(x - x_A) = m(x_B - x)$, или $nx - nx_A = mx_B - mx$, па $nx + mx = nx_A + mx_B$.

На крају, добијамо формуле за израчунавање координата тачке C која дјели дату дужу датом $(m : n)$ односу

$$x = \frac{nx_A + mx_B}{m+n} \text{ и аналогно } y = \frac{ny_A + my_B}{m+n}.$$

Посебно, ако ставимо $m : n = \lambda$ добијамо формуле

$$x = \frac{x_A + \lambda x_B}{1+\lambda},\ y = \frac{y_A + \lambda y_B}{1+\lambda}.$$

Ако је тачка C унутар дужи AB, као на нашој слици, тада су бројеви m и n позитивни, иначе нису. То је случај када из датих формула израчунавамо, рецимо, координате тачке B за познате координате тачака A и C.

Тежиште троугла са тјеменима A, B и C израчунавамо тако што прво налазимо средине страница BC, CA и AB редом

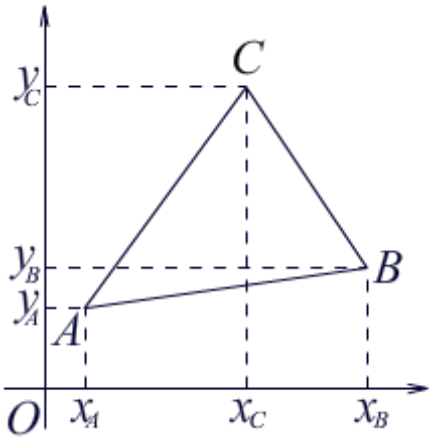
$$A_1\left(\frac{x_B + x_C}{2}, \frac{y_B + y_C}{2}\right),\ B_1\left(\frac{x_C + x_A}{2}, \frac{y_C + y_A}{2}\right) \text{ и } C_1\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right).$$

Заправо, довољна је само једна од средина. Затим, тражимо тачку $T(x_0, y_0)$, тежиште троугла, која тежишницу AA_1 дијели у односу 2:1

$$x_0 = \frac{1\cdot x_A + 2\cdot \frac{x_B + x_C}{2}}{2+1} = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \text{ и аналогно}$$

$$y_0 = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}.$$

Површину троугла ABC, произвољних тачака $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ и $C(x_C, y_C)$ ћемо разумјети помоћу следеће слике десно.



Уочимо да се површина троугла $P(ABC)$ састоји од површина трапеза: $P(x_Ax_CCA)$ плус $P(x_Cx_BBC)$ минус $P(x_Ax_BBA)$.

Знамо да је површина трапеза једнака производу полузбира основица (средње линије трапеза) и висине.

Другим рјечима, имамо

$$P_{ABC} = \left|\frac{y_A + y_C}{2}(x_C - x_A) + \frac{y_C + y_B}{2}(x_B - x_C) - \frac{y_A + y_B}{2}(x_B - x_A)\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\left|x_A(y_B - y_C) + x_B(y_C - y_A) + x_C(y_A - y_B)\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_A & x_B & x_C \\ y_A & y_B & y_C \end{vmatrix}\right|.$$

Задаци 18.1.1.

1. Наћи растојање између тачака A и B, гдје је

i. $A = (3, -2)$, $B = (-4, 1)$; **ii.** $A = (-3, -4)$, $B = (5, 2)$;
iii. $A = (1 - a, 2 + b)$, $B = (a - 2, b + 3)$; **iv.** $A = (3 - a, -2 - b)$, $B = (a - 4, b - 1)$;
v. $A = (a\cos t, a\sin t)$, $B = (-a\sin t, a\cos t)$.

2. Одредити координате тачке C која дијели дуж AB у односу $m : n = \lambda$, гдје је

i. $A = (1, -3)$, $B = (-2, 5)$, $m : n = 3 : 2$;
ii. $A = (-4, 2)$, $B = (1, 3)$, $m : n = 1 : 2$;
iii. $A = (2 - a, 2 + b)$, $B = (4 + a, 4 - b)$, $\lambda = 5 : 4$;
iv. $A = (a - 1, b - 2)$, $B = (a - 3, b - 4)$, $\lambda = -3$.

3. Израчунати површину троугла ABC, гдје је

i. $A = (2, 3)$, $B = (1, 4)$, $C = (-1, -1)$;

ii. $A = (-1, -2)$, $B = (3, -1)$, $C = (2, 3)$;
iii. $A = (2 - a, 3 + b)$, $B = (a - 2, b + 3)$, $C = (0, 4)$;
iv. $A = (a + 1, b + 2)$, $B = (a + 2, b - 1)$, $C = (0, 4)$.

4. За троуглове (i-iv.) из претходног задатка (3.) наћи
1. дужине страница;
2. дужине тежишница;
3. тежишта;
4. висине.

5. Одредити t тако да тачке $(2t + 1, t)$, $(2, -3 + 4t)$, $(-4t + 4, 1)$ буду колинеарне.

6. Површина троугла са тјеменима $A(2, 2)$, $B(1, -3)$ износи 5. Тежиште припада x-оси. Наћи координате тјемена C.

18.2. Једначине праве

Нека је $C(x, y)$ произвољна тачка праве AB. Тачке A, B и C су колинеарне, што значи да је површина троугла ABC нула. Отуда

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_A & x_B & x \\ y_A & y_B & y \end{vmatrix} = 0$$

Развијањем детерминанте по последњој колони (одоздо) добијамо

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_A & x_B \end{vmatrix} y - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ y_A & y_B \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} x_A & x_B \\ y_A & y_B \end{vmatrix} = 0, \text{ тј.}$$

$$(x_B - x_A)y - (y_B - y_A)x + (x_A y_B - x_B y_A) = 0,$$

што можемо писати $ax + by + c = 0$. То је **општи облик** једначине праве.

Примјер 18.2.1.
Нека је $A(-1, 3)$, $B(2, -1)$. Једначина праве AB је

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & x \\ 3 & -1 & y \end{vmatrix} = 0, \text{ тј. } 4x + 3y - 5 = 0. \blacklozenge$$

Експлицитни облик једначине праве добијемо када координату y изразимо помоћу x, тј.

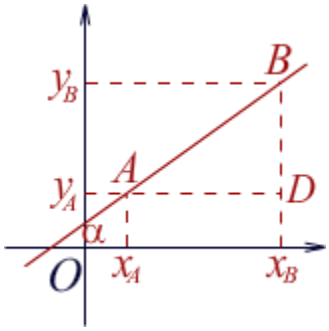
$$y = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} x - \frac{x_A y_B - x_B y_A}{x_B - x_A}, \text{ односно}$$

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}, \text{ гдје је } b \neq 0, \text{ или}$$

$$y = kx + n.$$

Примјетимо, прво, да експлицитни облик не обухвата случајеве општег облика када је $b = 0$, тј. не обухвата праве $ax + c = 0$. То су случајеви правих која имају произвољно $y \in \mathrm{R}$, а само једну вриједност $x = -\frac{c}{a}$ (за $a \neq 0$), што су праве окомите на апсцису (x-осу) у наведеној тачки x-а. Ако је $a = 0$, $c \neq 0$, имамо контрадикцију и нема графа, а ако су сва три параметра општег облика нуле ($a = b = c = 0$) онда тачка (x, y) може бити било гдје у датом координатном систему.

Друго, параметри експлицитног облика једначине праве (овдје k и n) имају посебна значења. Ако у експлицитну једначини ставимо $x = 0$ добијамо $y = n$, што значи да је n мјесто пресјека праве и ординате (y-осе).



Значење параметра k видимо са слике лијево. Из

$$k = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}, \text{ тј. } k = \frac{BD}{DA},$$

произилази да је k тангенс угла α, између праве и позитивног смјера x-осе. Када је $k = \mathrm{tg}\alpha > 0$ угао је оштар и права је растућа функција. Када је $k = \mathrm{tg}\alpha < 0$ угао је туп и права је опадајућа функција. Када је $\mathrm{tg}\alpha = 0$ тада је угао нула (или је испружен), а права је паралелна апсциси. Примјетимо да је $\mathrm{tg}\alpha = \infty$ када је угао прав, што значи да бисмо тада имали праву окомиту на апсцису, у складу са претходно наведеним случајем $b = 0$.

Треће, права $y = kx + n$ садржи тачку A па важе обе једнакости

$$y = kx + n$$
$$y_A = kx_A + n,$$

одакле одузимањем добијамо $y - y_A = k(x - x_A)$, што заједно са претходним даје

$$y - y_A = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x - x_A).$$

Слично добијамо ако тачку A замјенимо тачком B. Добили смо **једначину праве кроз двије** дате **тачке**.

Примјер 18.2.2.
Написати једначину праве која садржи тачке $A(-1, 3)$ и $B(4, -2)$.

Рјешење: Полазећи од једначине праве кроз двије тачке, добијамо

$$y - y_B = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x - x_B), \text{ тј. } y + 2 = \frac{-2-3}{4+1}(x-4).$$

Дакле, једначина ове праве у експлицитном облику је $y = -x + 2$. ♦

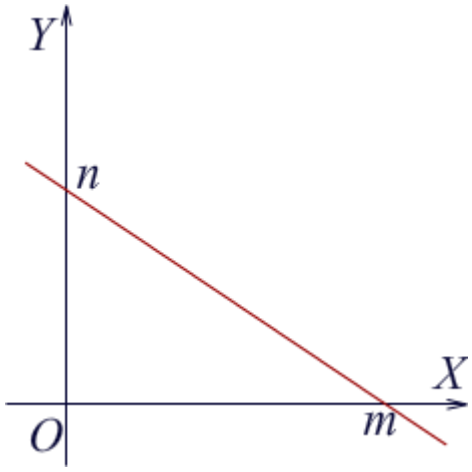
Прамен правих дат је једначином

$$y - y_A = k(x - x_A),\ k \in \mathbf{R}.$$

То су све праве које садрже фиксну тачку A, која је центар прамена, осим праве паралелне са ординатом.

Сегментни облик једначине праве је

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1, \text{ гдје } mn \neq 0.$$



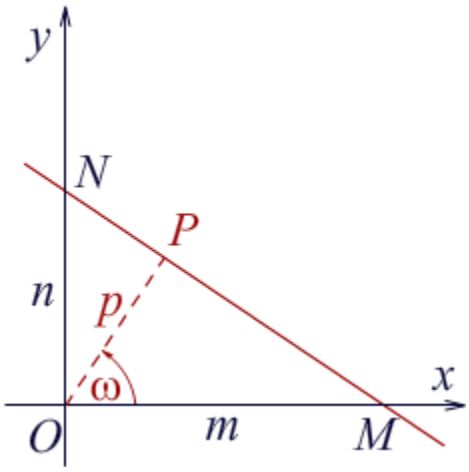
Релани бројеви m и n су одсјечци које права прави на осама.

Наиме, ако ставимо $x = 0$ добићемо $y = n$, што значи да права сијече y-осу у тачки n. Ако ставимо $y = 0$ добићемо $x = m$ што значи да права сијече x-осу у тачки m.

Примјер 18.2.3.
Сведимо једначину праве $2x - 3y + 5 = 0$ на сегментни облик.

Пишемо $2x - 3y = -5$, затим $\frac{2x}{-5} + \frac{-3y}{-5} = 1$ и коначно $\frac{x}{\left(-\frac{5}{2}\right)} + \frac{y}{\left(\frac{5}{3}\right)} = 1$. Према томе, имамо $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1$ гдје су $m = -\frac{5}{2}$ и $n = \frac{5}{3}$. ♦

Права у сегментном облику $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1$ сијече координатне осе у тачкама $M(m, 0)$ и



$N(0, n)$, као на слици лијево. Подножје нормале из O на праву је тачка P. Угао између нормале на праву и апсцисе је $\omega = \angle MOP$, па је $\omega = \angle ONP$, јер су то углови са окомитим крацима. Даље, имамо

$$\cos\omega = \frac{p}{m},\ \sin\omega = \frac{p}{n},\ \text{тј.}$$

$$m = \frac{p}{\cos\omega},\ n = \frac{p}{\sin\omega}.$$

Отуда слиједи **нормални облик једначине праве**:

$$x\cos\omega + y\sin\omega = p.$$

Примјер 18.2.4.
Сведимо општи облик једначине праве $ax + by + c = 0$ на нормални облик.

Рјешење: Морамо наћи такво λ да је $\lambda a = \cos\omega$, $\lambda b = \sin\omega$ и $\lambda c = -p$. Квадрирамо и сабирамо прве двије ове једначине, добијамо

$$\lambda^2(a^2 + b^2) = \cos^2\omega + \sin^2\omega = 1,\ \text{тј.}\ \lambda^2 = \frac{1}{a^2 + b^2}.$$

Како је $p > 0$, то због $-p = \lambda c$ даје

$$\lambda = \frac{1}{(-\operatorname{sgn} c)\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Дакле, нормални облик дате једначине је

$$\frac{ax + by + c}{(-\operatorname{sgn} c)\sqrt{a^2 + b^2}} = 0.\ \blacklozenge$$

Задаци 18.2.5.
1. Провјерити да ли су тачке A, B и C колинеарне, а ако јесу написати једначину праве у општем облику, којој те тачке припадају.
а) $A(2, 1)$, $B(-1, -5)$, $C(3, 3)$; **б**) $A(-1, 5)$, $B(3, -7)$, $C(2, -4)$.

2. Написати једначину праве која гради дати угао φ са апсцисом и пресјеца y-осу у датој тачки n.
а) $\varphi = 60°$, $n = -2$; **б**) $\varphi = \frac{\pi}{4}$, $n = 3$.

3. Дату једначину праве из општег облика превести у експлицитни, у сегментни и у нормални облик нацртати граф праве.
а) $2x - 3y + 4 = 0$; **б)** $-3x - 4y + 5 = 0$.

4. Дату једначину праве из експлицитног облика превести у општи, у сегментни и у нормални облик и нацртати њен граф.
а) $y = -3x + 4$; **б)** $y = 4x - 3$.

5. Дату једначину праве из сегментног облика превести у општи, експлицитни и нормални облик и представити њен граф.
а) $\frac{x}{-2} + \frac{y}{-3} = 1$; **б)** $\frac{x}{3} + \frac{y}{-4} = 1$.

6. Дату једначину праве из нормалног облика превести у општи, експлицитни и сегментни облик и представити је графом.
а) $x\cos 30° + y\sin 30° = 5$; **б)** $x\cos\frac{\pi}{3} + y\sin\frac{\pi}{3} = 2$;
в) $x\cos\frac{7\pi}{6} + y\sin\frac{7\pi}{6} = 3$; **г)** $x\cos 240° + y\sin 240° = 1$.

18.3. Узајамни односи

Видјели смо да је једначина **снопа правих**

$$y - y_0 = k(x - x_0),$$

гдје је k произвољан реалан број, који представља тангенс угла апсцисе и праве, а $S(x_0, y_0)$ је дата фиксна тачка, тзв. центар снопа, која припада свим правама снопа. Са друге стране, ако центар $S(x_0, y_0)$ припада једначини праве датој у општем облику

$$ax + by + c = 0,$$

тада важи и једнакост

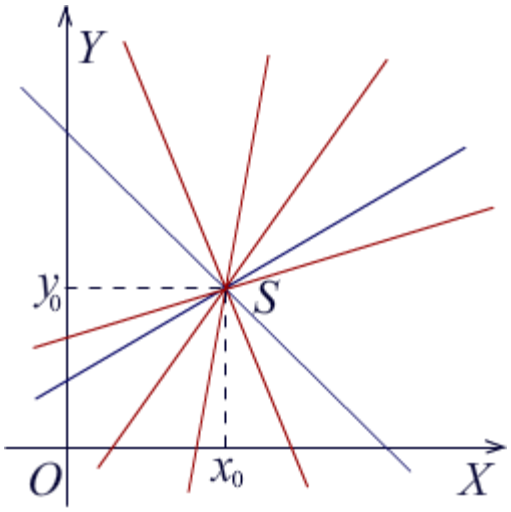
$$ax_0 + by_0 + c = 0.$$

Примјер 18.3.1.
Наћи једначину прамена правих, без одређивања центра прамена.

Рјешење: Нека су $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ и $a_2x + b_2y + c_2$ двије праве које се сјеку у

тачки $S(x_0, y_0)$. Посматрајмо једначину

$$\alpha(a_1x+b_1y+c_1)+\beta(a_2x+b_2y+c_2)=0,$$



гдје су α и β произвољни реални бројеви, такви да је бар један различит од нуле. За различите α и β то је увијек једначина праве линије. Уврстимо ли у њу координате тачке $S(x_0, y_0)$ добићемо сагласност, јер је сваки од фактора параметара α и β нула (тачка S припада обема правама). Према томе, та иста једначина, са произвољним α и β је тражена једначина прамена.

Посебно, када једначину подјелимо са једним од параметара α, или β различитим од нуле, рецимо α и ставимо $\lambda = \beta/\alpha$, добијамо једначину прамена у облику

$$a_1x+b_1y+c_1+\lambda(a_2x+b_2y+c_2)=0.\blacklozenge$$

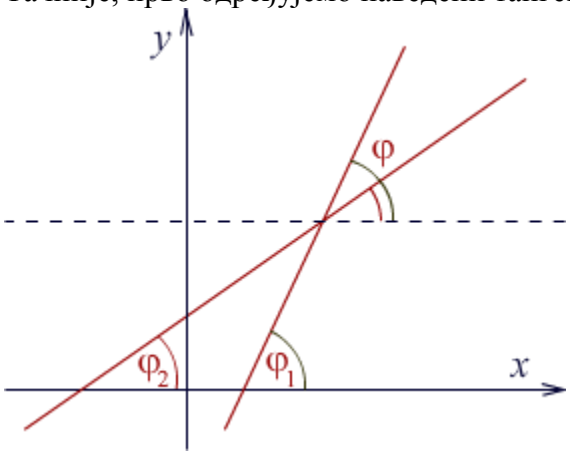
Угао између двије праве φ дате у експлицитном облику

$$y=k_1x+n_1 \text{ и } y=k_2x+n_2$$

одређујемо помоћу формуле

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{k_1-k_2}{1+k_1k_2}.$$

Тачније, прво одређујемо наведени тангенс, узимамамо његову позитивну (апсолутну) вриједност ако желимо оштар угао, односно негативну вриједност да би добили суплементан угао. Наиме,



$$k_1=\operatorname{tg}\varphi_1,\ k_2=\operatorname{tg}\varphi_2 \text{ и}$$

$$\operatorname{tg}(\varphi_1-\varphi_2)=\frac{\operatorname{tg}\varphi_1-\operatorname{tg}\varphi_2}{1+\operatorname{tg}\varphi_1\operatorname{tg}\varphi_2}, \text{ тј.}$$

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{k_1-k_2}{1+k_1k_2}.$$

Посебно, ако је бројник нула, тј. $k_1 - k_2 = 0$, тада је угао између правих нула, дате праве су паралелне. Са друге стране, ако је називник нула, тј. $1 + k_1 k_2 = 0$, праве се сјеку под правим углом.

Примјер 18.3.2.
Дата су тјемена троугла A(3, 1), B(1, 4), C(-2, -1).

1. Наћи угао у тјемену *A*.
2. Наћи висину *AD*.

Рјешење: Странице троугла су праве:

- *AB*: $y - 1 = \frac{4-1}{1-3}(x-3) \Leftrightarrow y = -\frac{3}{2}x + \frac{11}{2}$;
- *BC*: $y - 4 = \frac{-1-4}{-2-1}(x-1) \Leftrightarrow y = \frac{5}{3}x + \frac{7}{3}$;
- *CA*: $y + 1 = \frac{1+1}{3+2}(x+2) \Leftrightarrow y = \frac{2}{5}x - \frac{1}{5}$.

Тангенс траженог оштрог угла је $\operatorname{tg}\angle(AB, AC) = \left|\frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}\right| = \left|\frac{\left(-\frac{3}{2}\right) - \left(\frac{2}{5}\right)}{1 + \left(-\frac{3}{2}\right)\left(\frac{2}{5}\right)}\right| = \frac{19}{4}$, па је $\angle(AB, AC) = \operatorname{arctg}(19/4) = 78° 6′ 41″$. Висина *AD* је окомита на страницу *BC* и садржи тачку *A*. Како је коефицијент странице *BC* једнак $k_{BC} = \frac{5}{3}$, то је коефицијент висине $h_A = -\frac{3}{5}$, па права на којој лежи висина има једначину $y = -\frac{3}{5}x + n$ са непознатим *n*. Међутим, позната тачка *A*(3, 1) је на тој висини, па имамо $1 = -\frac{3}{5} \cdot 3 + n$, одакле слиједи *n* = 14/5. Коначно, тражена једначина висине је $y = -\frac{3}{5}x + \frac{14}{5}$.♦

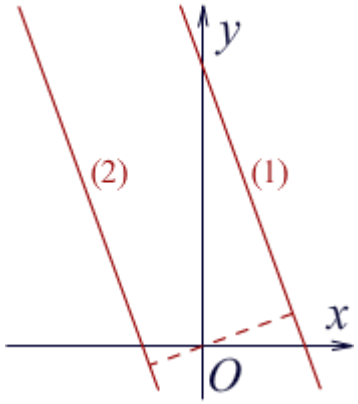
Видјели смо да за **паралелне праве** чије су једначине у експлицитном облику важи $k_1 = k_2$. Паралелне праве чије су једначине у општем облику, имаће пропорционалне коефицијенте уз промјењиве *x* и *y*. Наиме, ако су дате праве

$$a_1 x + b_1 y + c_1 = 0 \text{ и } a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$$

паралелне, тада је $a_1 : b_1 = a_2 : b_2$, а наведена размјера једнака је коефицјенту *k* експлицитног облика једначина тих правих.

Примјер 18.3.3.

Паралелне су праве $\frac{x}{4}-\frac{y}{6}=1$ и $\frac{x}{6}-\frac{y}{9}=1$, дате у сегментном облику. Такође, паралелне су праве $x\cos 20°+y\sin 20°=5$ и $x\cos 20°+y\sin 20°=-3$, дате у нормалном облику. Обратимо пажњу на овај други случај.



На слици десно су прва и друга поменута права, дата у нормалном облику.

Испрекидана линија кроз исходиште координатног система (O) је нормала на дату праву и она мјери удаљеност од исходишта до праве. Када су праве са различитих страна исходишта, углови ω су суплементни.

Овдје је $p_1 = 5$ и $p_2 = 3$, при чему за угао друге праве (лијево од O) треба узети суплементан угао $\omega_2 = 180° - \omega_1 = 160°$. Удаљеност између правих је $p_1 + p_2 = 8$.♦

Удаљеност између двије праве налазимо на начин приказан у прошлом примјеру (18.3.3.). Ако су праве дате у нормалном облику

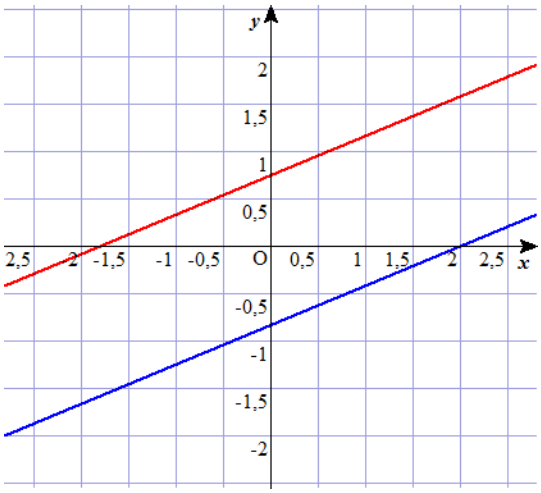
$$x\cos\omega_1 + y\sin\omega_1 = p_1 \text{ и } x\cos\omega_2 + y\sin\omega_2 = p_2$$

да су оба угла ω_1 и ω_2 једнака и оба броја p_1 и p_2 позитивна онда је удаљеност између двије праве

$$d = | p_1 - p_2 |.$$

Ако је неки од бројева p негативан, то значи да је права лијево од исходишта (одговарајући угао ω треба бити суплементан), али опет важи иста формула, јер се растојања сабирају.

Примјер 18.3.4.
Праве



$10x - 24y - 20 = 0$ и
$15x - 36y + 27 = 0$

налазе се са различитих страна координатног почетка, а њихови нормални облици су

$$\frac{5}{13}x - \frac{12}{13}y = \frac{10}{13} \text{ и}$$
$$\frac{5}{13}x - \frac{12}{13}y = -\frac{9}{13}.$$

Удаљеност d међу овим правама је

$$d = \frac{10}{13} + \frac{9}{13} = \frac{19}{13}. \blacklozenge$$

Удаљеност између тачке и праве налазимо на сличан начин. Нека су дате тачка $M(x_0. y_0)$ и права, чија је једначина у нормалном облику

$$x\cos\omega + y\sin\omega = p.$$

Права паралелна са датом, која пролази тачком M има једначину

$$x\cos\omega + y\sin\omega = p_0, \text{ гдје је } p_0 = x_0\cos\omega + y_0\sin\omega.$$

Удаљеност између ове двије паралеле је $d = |p_0 - p|$, тј.

$$d = |x_0\cos\omega + y_0\sin\omega - p|.$$

Као и у претходном случају, ова формула важи у оба случаја, ако су праве са исте и ако су праве са разних страна координатног почетка.

Слично, када је једначина праве дата у општем облику

$$ax + by + c = 0,$$

налазимо њену једначину у норамалном облику

$$\frac{ax + by + c}{(-\operatorname{sgn} c)\sqrt{a^2 + b^2}} = 0,$$

а затим користимо исту формулу за удаљеност праве до тачке $M(x_0. y_0)$

$$d = \left| \frac{ax_0 + by_0 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|.$$

Примјер 18.3.5.
Наћи удаљеност тачке $M(4, 5)$ од праве $3x + 4y - 5 = 0$.

Рјешење: Нормални облик дате праве добијамо дјелећи је са $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$, па је тражено растојање $d = \left| \frac{3 \cdot 4 + 4 \cdot 5 - 5}{5} \right| = \frac{27}{5} = 5{,}4.$ ♦

Симетралу угла између двије дате праве можемо наћи на начин сличан претходним. Нека су дате праве l_1 и l_2

$$x\cos\omega_1 + y\sin\omega_1 = p_1 \text{ и } x\cos\omega_2 + y\sin\omega_2 = p_2$$

које се сјеку. Примјетимо да постоје двије симетрале s_1 и s_2, и да су симетрале углова двију правих увијек окомите. Тачке $M(x. y)$ једне, било које од тих симетрала су једнако удаљене од обе дате праве. Према претходним формулама за растојање, имамо

$$x\cos\omega_1 + y\sin\omega_1 - p_1 = \pm(x\cos\omega_2 + y\sin\omega_2 - p_2).$$

Слично, симетрале углова између двије праве дате у општем облику су дате једначинама

$$\frac{a_1x + b_1y + c_1}{\pm\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} \pm \frac{a_2x + b_2y + c_2}{\pm\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} = 0,$$

а као што знамо, знак плус, или минус испред корјена одређујемо тако да буде супротан са предзнаком c. Знак између разломака је плус за симетралу угла којем не припада координатни почетак, а у другом случају је минус.

Примјер 18.3.6.
Наћи симетрале углова између правих $x - 2y + 3 = 0$ и $4x - 3y - 2 = 0$.

Рјешење: Преведене у нормални облик, то су праве

$$\frac{x - 2y + 3}{-\sqrt{5}} = 0 \text{ и } \frac{4x - 3y - 2}{5} = 0.$$

Према томе, једначине симетрала углова су

$$\frac{x-2y+3}{-\sqrt{5}}-\frac{4x-3y-2}{5}=0 \text{ и } \frac{x-2y+3}{-\sqrt{5}}+\frac{4x-3y-2}{5}=0.$$

Након поједностављивања, добијамо симетрале

$$(-\sqrt{5}-4)x+(2\sqrt{5}+3)y+(-3\sqrt{5}+2)=0,$$
$$(-\sqrt{5}+4)x+(2\sqrt{5}-3)y+(-3\sqrt{5}-2)=0.\blacklozenge$$

Задаци 18.3.6.

1. Праве $x - 2y + 1 = 0$, $5x + 3y - 5 = 0$ и $3x + y - 11 = 0$ образују троугао. Не тражећи тјемена троугла, саставити једначине висина.

2. Дат је прамен правих $\alpha(2x - 3y + 1) + \beta(3x + y + 2) = 0$. Наћи ону праву у том прамену која на координатним осама одсјеца одсјечеке једнаке дужине.

3. Доказати да праве за све вриједности параметра t пролазе истом тачком и наћи ту тачку:

1. $(t - 3)x + (2t - 1)y + (t + 2) = 0$;
2. $(2 - t)x - (3 - 2t)y + (1 + t) = 0$.

4. Наћи једначину праве која је паралелна са правама $6x - 8y + 5 = 0$ и $-9x + 12y - 11 = 0$, и налази се на средини између њих.

5. Наћи праву кја је паралелна са правом $5x + 2y - 3 = 0$, а од тачке $M(1, 2)$ је удаљена 3 јединице дужине.

6. Колико је растојање тежишта троугла са тјеменима A(0, 1), B(2, -3) и C(-4, 1) од најкраће странице?

7. Написати једначину праве која садржи тачку (2, 3), а од тачке (4, 1) је удаљена за 1.

8. Наћи површину троугла ABC, када је дата страница AB: $x + y + 2 = 0$, страница BC: $3x - y = 0$ и једначина тежишне линије из A: $x - 3y + 3 = 0$.

9. Дата су тјемена троугла $A(-1, 2)$, $B(2, 3)$, $C(1, -2)$.

1. Одредити једначине висина троугла.
2. Одредити једначине тежишних линија троугла.
3. Наћи једначине симетрала страница троугла.
4. Одредити ортоцентар H, тежиште T и центар S описаног круга троугла и показати да се све три тачке налазе на истој правој (Ојлерова права).
5. Доказати да је $|HS| = 3|TS|$.

10. Наћи једначину праве која са x-осом образује два пута већи угао него права $x - 2y + 3 = 0$, а која садржи координатни почетак.

11. Одредити једначину праве која пролази кроз тачку (-1, -2), а са правом $2x + 3y = 6$ образује угао чији је тангенс 1/3.

12. На правој $x - y + 1 = 0$ наћи тачку једнако удаљену од праве $2x + y - 1 = 0$ и тачке (3, -1).

13. Наћи геометријско мјесто средина дужи које се могу конструисати из тачке (2, 0) на праву $x = -2$.

14. Одредити геометријско мјесто тачака у равни из којих се спуштене нормале на праве $3x - 4y + 5 = 0$ и $2x + 3y - 4 = 0$ односе као 2:3.

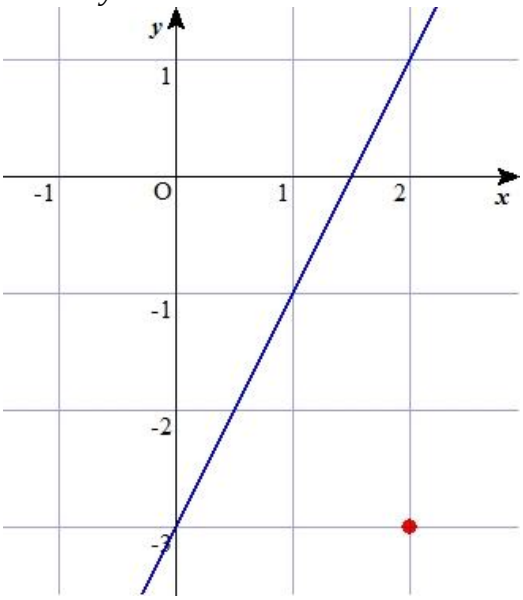
18.4. Линеарне неједначине

Линеарна неједначина, је израз облика

$$Ax + By + C < 0,$$

гдје умјесто неједнакости „мање“ (<) може стајати „мање или једнако“ (≤), „веће или једнако“ (≥), или „веће“ (>). Њоме је у 2-дим координатном систему дефинисана једна **полураван** чија граница је исти линеарни израз гдје умјесто „мање“ стоји „једнако“ (=).

Примјер 18.4.1.
Графички представити скуп рјешења неједначине $y < 2x - 3$.



Рјешење: На слици десно, дат је граф праве $y = 2x - 3$, која је граница двије полуравни. Једна од тих полуравни су тражена рјешења. Која?

Тачка $O(0, 0)$ није у скупу рјешења. Наиме, ако уврстимо координате $x = 0$, $y = 0$ у дату неједначину $0 < 2\cdot 0 - 3$ не добијамо тачан исказ. То одма значи да полураван десно и доле од приказане праве чини скуп рјешења дате неједначине. Заиста, тачка на приказаном графу, са координатама (2, -3) задовољава скуп рјешења дате неједначине, јер је $-3 < 2\cdot 2 - 3$. Граница, приказана права, не припада скупу рјешења. ♦

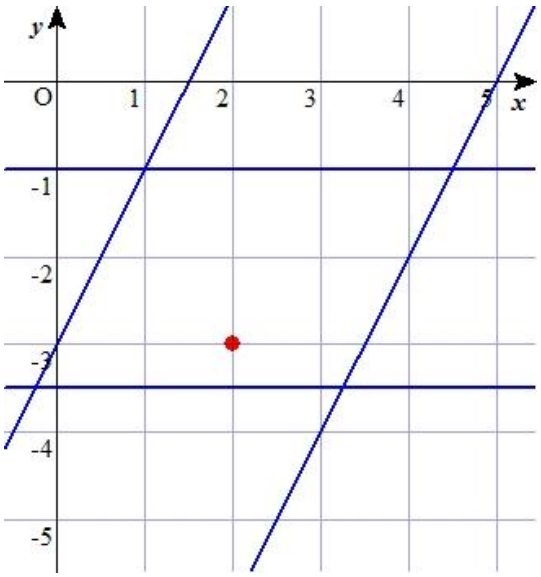
Систем од више линеарних неједначина у координатном систему може дефинисати **полигон**.

Примјер 18.4.2.

Показати да систем линеарних недедначина

$$y \le 2x - 3 \wedge y \le -1 \wedge y \ge -3{,}5 \wedge y \ge 2x - 10$$

представља паралелограм.



Рјешење: На слици лијево су приказане праве $y = 2x - 3$, $y = -1$, $y = -3{,}5$ и $y = 2x - 10$.

Ове праве формирају паралелограм чија унутрашњост, укључујући и границе, странице паралелограма (због неједнакости $\le$ и $\ge$), је тражени скуп рјешења.

Контрола: тачка (2, -3) која је унутар паралелограма, задовољава сваку од датих неједнакости: $-3 \le 2\cdot 2 - 3 \wedge -3 \le -1 \wedge -3 \ge -3{,}5 \wedge -3 \ge 2\cdot 2 - 10$. ♦

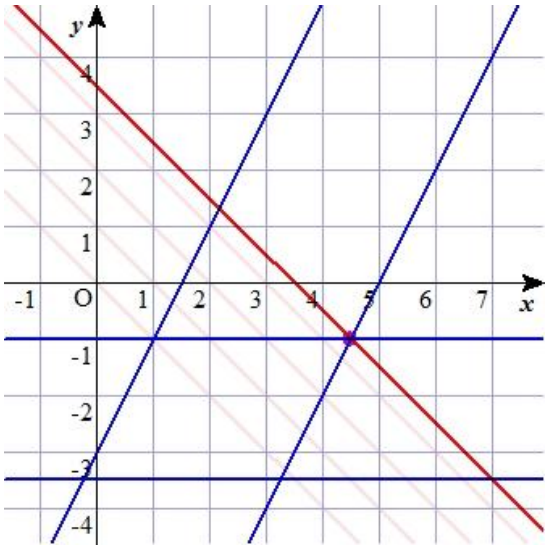
Знамо да су праве дате у експлицитном облику $y = kx + n_1$ и $y = kx + n_2$ паралелне, јер имају једнаке коефицијенте смјера k, док је горња на графу она чији одсјечак n_{12} је већи број. Помножимо ли експлицитне једначине праве са бројем b и ставимо $-bk = a$, $bn_{12} = c_{12}$, добићемо општу једначину праве $ax + by = c$. Двије праве писане у општем облику $a_1x + b_1y = c_1$ и $a_2x + b_2y = c_2$ су паралелне ако је $a_1 : b_1 = a_2 : b_2$, тј. ако су им коефицијенти смјера (k) једнаки.

Према томе, за различите бројеве $L = c$ линеарни израз $ax + by = L$ представља различите паралелне праве.

Примјер 18.4.3.
Наћи максималну вриједност броја $L = x + y$ тако да важе неједначине

$$y \le 2x - 3 \wedge y \le -1 \wedge y \ge -3{,}5 \wedge y \ge 2x - 10.$$

Рјешење: На слици десно видимо паралелограм из претходног примјера (18.4.2.) и неколико паралелних правих $L = x + y$, за $L = 0, 1, 2, 3$ и $L = 3{,}5$. Од свих паралелних правих, највећи број L има она која садржи тачку (3,5; -1) која је крајње десно тјеме поменутог паралелограма.



Према томе, максимална вриједност броја $L = x + y$ таква да важе дате неједначине је $L = 3{,}5$. ♦

Задаци 18.4.4.

1. Приказати графички скуп рјешења неједначине:

1) $5x - 2y + 10 < 0$;

2) $3x - y + 2 \geq 0$.

2. Приказати графички скуп рјешења неједначина:

1) $x - y + 1 \geq 0 \wedge x + y - 1 \leq 0$;
2) $-2x + y - 4 < 0 \wedge x + y + 2 > 0$.

3. Представити скуп рјешења:

1) $x - 2y < 0 \wedge 2x - y > 0 \wedge x + y - 6 > 0$;
2) $2x + 2y + 3 \geq 0 \wedge -x - y + 2 \geq 0 \wedge x + y - 1 \geq 0$.

4. Наћи дио равни дату неједначинама:

1) $x + y \geq 1 \wedge 3x - y \leq 3 \wedge -x + y \leq 1 \wedge x \geq 0 \wedge y \geq 0$;
2) $-x + y \leq 4 \wedge 3x + 2y \geq 4 \wedge -x + y \geq -5 \wedge x \geq 0 \wedge y \geq 0$.

5. Наћи 1) најмању, и 2) највећу вриједност броја $L = 7x + 8y$ уз ограничења:

$$3x + y \geq 15 \wedge 11x + 3y \leq 56 \wedge x \geq 0 \wedge y \geq 0.$$

6. Наћи 1) највећу, и 2) најмању вриједност броја $L = 4x + 7y$ уз ограничења:

$$5x + 3y \leq 2 \wedge x \geq 0 \wedge y \geq 0.$$

18.5. Линеарно програмирање

У периоду 1935 – 1955. појавила се математичка дисциплина која се зове Линеарно програмирање, односно Математичко програмирање (линеарно, нелинеарно, динамичко). Дисциплина је израсла из планских разматрања привредних, производних и превозних проблема, и то прво у радовима Нојмана (*J. von Neumann*, 1936.) у вези економије у развоју и Л. В. Канторовића (1939.) у вези с планираном производњом и превозом. Данциг (*George B. Dantzig* 1914–2005) је 1947. формулисао општи проблем линеарног програмирања и развио тзв. симплексну методу за рјешавање тога проблема, али коју овдје нећемо проучавати.

Код **линеарног програмирања** се тражи максимално (минимално) рјешење појединог задатка које се може изразити помоћу линеарних функција, линеарних једначина и линеарних неједначина. Назив програмирање долази од планирања и координирања производње у циљу оптималног рјешења.

Примјер 18.5.1.
Фабрика производи два типа T_1 и T_2 неке робе и то помоћу машина M_1 и M_2. За тип T_1 машине раде 2 часа и 4 часа, а та тип T_2 радно вријеме је 4 часа и 2 часа. Ако је зарада 300 КМ по типу T_1, а 500 КМ по типу T_2, треба организовати рад машина тако да зарада буде што већа[1].

Рјешење:

Нека је x_1 број израђених јединица типа T_1 на дан.

Нека је x_2 број израђених јединица типа T_2 на дан.

То значи да је зарада $z = 300x_1 + 500x_2$.
При томе је:

$$2x_1 + 4x_2 \le 24$$
$$4x_1 + 2x_2 \le 24$$
$$x_1 \ge 0$$
$$x_2 \ge 0.$$

Рјешење сваке од датих неједначина је затворена полуравнина (нацртајте их!); рјешење све четири неједначине је конвексни (испупчени) четвороугао

$$(0, 0), (6, 0), (4, 4), (0, 6)$$

као пресјек тих полуравнина. Лако је показати да вункција z узима екстремне вриједности на врховима. За саме врхове, функција z има вриједности, редом:

$$0, 1800, 3200, 3000.$$

Дакле, тражени оптимум је постигнут у тачки (4, 4).

То значи да ће зарада бити максимална када се на машини M_1 дневно израде 4 примјерка робе типа T_1, а на машини M_2 четири примјерка робе типа T_2. Зарада је дневно 3200 КМ.♦

Претпоставимо да нека компанија има три фабрике F_1, F_2, F_3, које производе робу исте врсте, при чему фабрика F_i производи (нпр. мјесечно) p_i јединица те робе (i = 1, 2, 3). Рецимо да иста компанија има четири продајна мјеста M_1, M_2, M_3, M_4, тако да продајно мјесто M_j мора бити (нпр. мјесечно) снабдјевено са q_j јединица производа (j = 1, 2, 3, 4). Снабдјевање било ког продајног мјеста M_j могуће је из било које фабрике F_i. То су претпоставке за тзв. **транспортни проблем** линеарног програмирања.

Даље, нека су x_{ij} **количине** робе (i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3, 4) превезене од фабрике F_i до мјеста M_j, а a_{ij} је **цијена** транспорта **по јединици** производа од F_i до M_j. Ако су

[1] Др Ђуро Курепа: ВИША АЛГЕБРА, књига друга, Грађевинска Књига, Београд, 1979.

величине p_i, q_j, a_{ij} дате константе, треба одредити x_{ij} тако да је укупна цијена превоза што мања.

Укупна цијена свих превоза, означена са L износи

(*) $$L = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4} a_{ij}x_{ij}$$

и треба наћи **минималну** вриједност тог броја (L). При томе водимо рачуна да су испуњени сљедећи услови (i = 1, 2, 3 и j = 1, 2, 3, 4):

i. $x_{ij} \geq 0$, тј. количине произведених роба не могу бити негативне;

ii. $\sum_{j=1}^{4} x_{ij} = p_i$, јер из сваке фабрике F_i треба отпремити сву производњу;

iii. $\sum_{i=1}^{3} x_{ij} = q_j$, свако продајно мјесто M_j добија потребну количину q_j;

iv. $\sum_{i=1}^{3} p_i = \sum_{j=1}^{4} q_j$, сва произведена роба је продата.

Број L, који зависи од количина x_{ij} и цијена a_{ij}, назива се **функција циља**. Услови i – iv називају се **услови ограничења.**

Последњи услов (*iv*) дефинише тзв. **затворени транспортни проблем**, када је укупна понуда једнака укупној потражњи. Међутим, могућ је и другачији случај, када количина понуде није једнака количини потражње, а тада умјесто једнакости сума стављамо знак неједнакости и кажемо да имамо **отворени транспортни проблем**.

Такође, можемо другачије формулисати и услове ii и iii. На примјер, ако знамо само толико да је свако продајно мјесто снабдјевено са бар q_j јединица производа, тада на мјесту трећег услова (iii) умјесто једнакости треба стајати неједнакост „веће или једнако“.

У сваком случају, транспортни проблем линеарног програмирања састоји се у тражењу минималне вриједности функције циља, при чему промјењиве x_{ij} задовољавају услове ограничења[2].

Примјер 18.5.2.
Нека двије фабрике F_1 и F_2 производе по p_1 = 40 и p_2 = 60 јединица производа (дневно). Ове фабрике имају три продавнице M_1, M_2 и M_3 којима је потребно редом по q_1 = 20, q_2 = 30 и q_3 = 50 јединица робе. Ако су цјене превоза по јединици робе (коефицијенти a_{ij}) дати сљедећом табелом

	F_1	F_2
M_1	120	110
M_2	100	95

[2] Јован Д. Кечкић: МАТЕМАТИКА, са збирком задатака, за III разред средње школе, Научна књига, Београд, 1992.

	M_3	90	130

формирати функцију циља и и услове ограничења за дати транспортни проблем.

Рјешење: Са x_{ij} ($i = 1, 2$; $j = 1, 2, 3$) означимо број производа превезених од F_i до M_j. Тада је функција циља L дата са

$$L = 120x_{11} + 100x_{12} + 90x_{13} + 110x_{21} + 95x_{22} + 130x_{23}.$$

При томе мора бити

$$x_{ij} \geq 0 \quad (i = 1, 2;\ j = 1, 2, 3).$$

Услови типа (iii) сада су

$$x_{11} + x_{21} = 20$$
$$x_{12} + x_{22} = 30$$
$$x_{13} + x_{23} = 50$$

Датим подацима обезбјеђено је да се произведе онолико производа колико се и прода, јер важи $p_1 + p_2 = q_1 + q_2 + q_3 = 100$. Тиме је математички формулисан (моделиран) дати транспортни проблем и треба одредити минималну вриједност L под условима датих линеарних израза. Рјешавање проблема се овдје не тражи. ♦

Примјер 18.5.3.
Дата је функција циља

$$L = 2x + y,$$

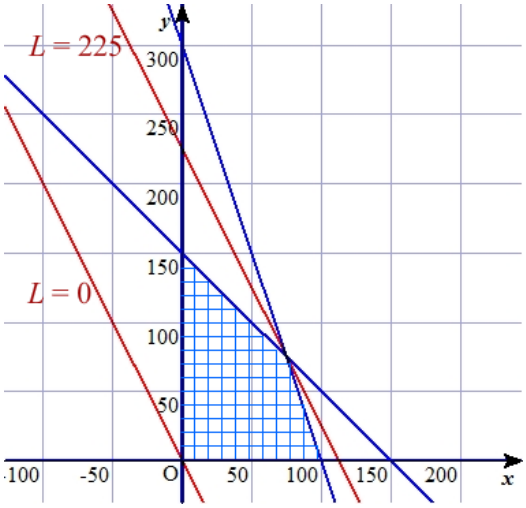
и услови ограничења

$$3x + y \leq 300,\ x + y \leq 150,\ x \geq 0,\ y \geq 0.$$

Одредити максималну и минималну вриједност функције циља ако су промјењиве x и y ограничене датим условима.

Рјешење: Геометријском методом рјешавамо систем линеарних неједначина (в. 18.4).

Добијамо тачке (плаво) шрафираног дјела равни, на сљедећој слици. Функције циља за двије екстремне вриједности $L_{\min} = 0$ и $L_{\max} = 225$ су (црвене) паралелне праве које пролазе крајњим тачкама шрафиране области.



Отуда закључујемо да важи:

$$L_{\min} = 0 \leq 2x + y \leq L_{\max} = 225. \blacklozenge$$

Задаци 18.5.4.
1. Дата је функција циља $L = x + y$ и услов ограничења

$$x + y \geq 1,\ x + y \leq 10,\ x \geq 0,\ y \geq 0.$$

Одредити минималну и максималну вриједност функције циља уз дата ограничења.
[Бесконачно много оптималних тачака:

$1 \le x + y \le 10$]

2. Испитати да ли функција циља $L = x + y$ уз услов ограничења

$$2x + y \ge 2,\ x - y \le 1,\ x - y \ge -2,\ x \ge 0,\ y \ge 0$$

има минималну и максималну вриједност и ако их има одредити их.

3. Рјешити транспортни проблем из примјера 18.5.2.

4. Објаснити зашто нити једна функција циља не може имати оптимум уз сљедеће услове ограничења

$$3x + 2y \ge 4,\ y - x \le 4,\ y - x \ge -5,\ x \ge 0,\ y \ge 0.$$

5. Одредити максималну вриједност функције циља $L = 10x_1 + 14x_2 + 12x_3$ уз услове $x_1 + \frac{3}{2}x_2 + 4x_3 \le 2000$, $2x_1 + \frac{6}{5}x_2 + x_3 \le 1000$, $x_1 \ge 200$, $x_2 \ge 250$, $x_3 \ge 100$.

6. Дата је функција циља $L = ax_1 + (1 + a)\,x_2$ гдје је $a > 0$, уз услове ограничења

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_1 \le 2,\ x_3 \le 3.$$

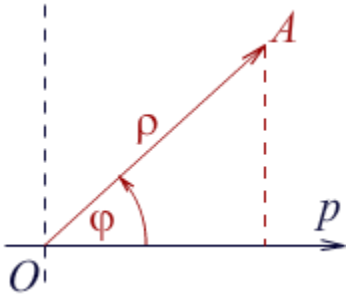
Одредити константу a тако да максимална вриједност функције L буде 13.

19. Системи координата

Поред Декартовог правоуглог 2-D система координата, понекад радимо и у поларном. У 3-D системима, уз Декартов имамо цилиндрични и сферни координатни систем.

19.1. Поларни систем

Нека је p орјентисана права, O једна њена тачка, и нека је дат смјер обртања око тачке O у равни. Подразумјевани смјер обртања у математици је обрнут од смјера казаљке на сату.



Тачка A је у тој равни одређена својим вектором положаја $\overrightarrow{OA}$. Дуж OA, чија је дужина $\rho = |\overrightarrow{OA}|$ зове се потег, или **радијус вектор** тачке A. Угао φ узет у датом смјеру, између орјентисане праве p и вектора $\overrightarrow{OA}$, зове се **поларни угао** тачке A, $\varphi = (p, \overrightarrow{OA})$. Тај угао није потпуно одређен, може му се више пута додати, или одузети 2π.

Међутим, када су дати ρ и φ, тачка A је у равни потпуно одређена. Величине ρ и φ се називају **поларне координате** тачке A.

Узмимо праву p за апсцису (x-осу) **Декартовог правоуглог система** координата, тачку O за исходиште. Ординату (y-осу) поставимо тако да је $\angle xOy = \frac{\pi}{2}$, зависно од тога у ком смјеру мјеримо поларне углове. Ако су у правоуглом систему x и y координате тачке A, онда је

$$x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi.$$

Овим формулама радимо трансформацију правоуглог координатног система у поларни и обрнуто. Обрнуте трансформације су

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2},\ \varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}.$$

Поненекад, потег неке тачке A узимамо **негативно**. То значи да се дуж OA треба пренијети у супротном смијеру. Другим ријечима, ако ρ и φ одређују тачку A, онда ће -ρ и φ одређивати тачку A_1, тако да је $OA_1 = -OA$. Тада тачка A_1 има поларне координате ρ и $\varphi + \pi$. Према томе, -ρ и φ значи исто што ρ и $\varphi + \pi$.

Задаци 19.1.1.
1. Какве вриједности има φ у различитим квадрантима?
2. Какво је значење негативног угла φ?
3. Шта је геометријско мјесто тачака константне вриједности угла φ, а шта потега ρ?
4. Да ли се из $\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}$ може одредити φ, или су потребне обе једначине трансформације.

19.2. Тродимензионални системи

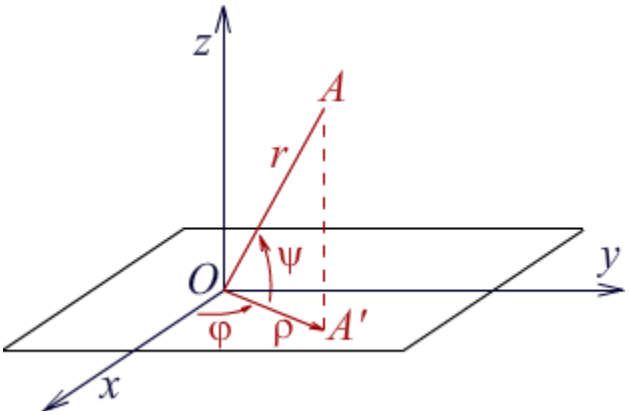
Поставимо окомито на раван поларног система координата у тачки O орјентисану праву Oz, добићемо **цилиндрични координатни систем**. Тачка A је у (3-D) простору потпуно одређена са ρ, φ и z.

Када се поларни и правоугли систем поклапају, тако да имају заједничко исходиште O, заједничку поларну и x-осу (апсцису), на њу окомиту y-осу (ординату) и заједничку z-осу (апликату), онда су трансфорације координата тачке A(x, y, z), односно исте тачке $A(\rho, \varphi, z)$ из Декартовог правоуглог у цилиндарски ситем координата и обрнуто дате са

$$x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi,\ z = z.$$

Означимо са A' ортогоналну пројекцију тачке A на поларну раван, као на

следећој слици . У равни $OA'Az$ узмимо за позитиван смјер обртања онај за који је $\angle(\overrightarrow{OA'},Oz)=\frac{\pi}{2}$ и угао $\angle(\overrightarrow{OA'},\overrightarrow{OA})$ означимо са ψ. Потег $|\overrightarrow{OA}|$ тачке A означимо са r. Видимо да r, φ и ψ одређују положај тачке A у простору. То су **сферне координате** тачке A,



поларне координате у простору. Лако је видјети да је

$$\rho = r\cos\psi,\ z = r\sin\psi,$$

па је

$$x = r\cos\varphi\cos\psi,\ y = r\sin\varphi\cos\psi,\ z = r\sin\psi.$$

То су формуле за трансформацију правоуглих координата у сферне и обрнуто.

Понекад се умјесто угла ψ као сферна координата узима угао θ између Oz и $\overrightarrow{OA}$, мјерен у супротном смјеру од ψ. Како је

$$\angle(\overrightarrow{OA'},\overrightarrow{OA})+\angle(\overrightarrow{OA'},Oz) = \angle(\overrightarrow{OA'},Oz)+2k\pi,$$

то је

$$\theta=\frac{\pi}{2}-\psi+2k\pi,\ \psi=\frac{\pi}{2}-\theta+2k\pi.$$

Дакле,

$$\cos\theta=\sin\psi,\ \sin\theta=\cos\psi.$$

Задаци 19.2.1.

1. Изразити $x^2+y^2+z^2$ у цилиндричним и сферним координатама.

2. Упоредити сферне координате са географским координатама, претпостављајући да је Земља лопта.

3. Када се у равни фиксира једна координата, шта је геометријско мјесто тачака свих вриједности друге координате? У правоуглом и поларном систему.

4. Када се у простору фиксира једна координата, шта је геометријско мјесто тачака свих вриједностиостале дије координате? У правоуглом, цилиндричном и сферном систему.

5. Шта је геометријско мјесто свих вриједности једне координате, када се остале двије просторне координате фиксирају?

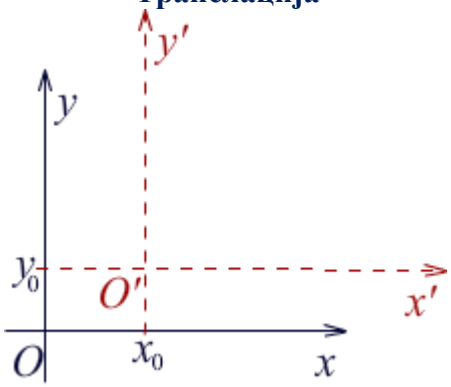
19.3. Трансформација координата

Трансформација координатног система је прелаз са једног координатног система на други. Ову трансформацију можемо разумјети и као пресликавање, функцију. Трансформације кооридната настају: рефлексијом око линије или равни, разним смицањима, растезањем (дилатацијом) или скупљањем (контракцијом), експанзијом по неком коефицијенту, ротацијом по појединим осама, као и комбинацијама било којих од наведених трансформација.

Примјер 19.3.1.
Дата су два Декартова правоугла система координата Oxy и $O'x'y'$.

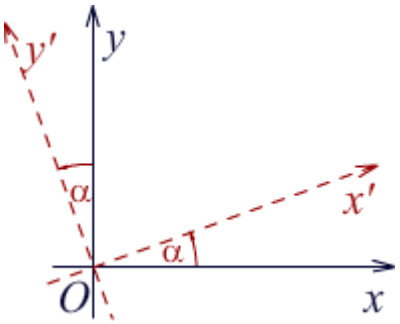
- **Транслација** (паралелно помјерање) је одређивање слике тачке у једном систему помоћу релативног положаја исте тачке у другом систему помоћу константног вектора транслације $\overrightarrow{OO'}$.
- **Ротација** (обртање) је одређивање слике T' тачке T помоћу константног угла ротације $\angle TOT'$, који је на следећој слици α.

Транслација



$$\begin{cases} x = x' + x_0 \\ y = y' + y_0 \end{cases}$$

Ротација



$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \end{cases}$$

Доказ формула је дат у наставку (в. примјер 19.3.6.). ♦

У случају **3-димензионалних** координатних система $Oxyz$ и $O'x'y'z'$, све транслације остају сличне, али се при ротацији могу појавити **различити углови** између три пара одговајућих оса. Како су осе тих система орјентисане праве, косинуси тих углова су потпуно одређени:

$$\cos(x,x') = a_{xx},\ \cos(x,y') = a_{xy},\ \cos(x,z') = a_{xz},$$
$$\cos(y,x') = a_{yx},\ \cos(y,y') = a_{yy},\ \cos(y,z') = a_{yz},$$
$$\cos(z,x') = a_{zx},\ \cos(z,y') = a_{zy},\ \cos(z,z') = a_{zz}.$$

Нови систем може имати и обрнуту орјентацију, рецимо ако замјенимо y' са x', а координатни почеци не морају бити у истим тачкама, тј. може бити $O \neq O'$.

Најопштија трансформација правоуглих координатних система састоји се из једне транслације и једне трасформације којом се не мјења исходиште. Којим се редом ове двије трансформације изводе свеједно је.

Неки вектор $\vec{r}$ имаће у **правоуглом координатном систему** *Oxyz* координате *x, y, z*, а у координатном систему *O'x'y'z'* координате *x', y', z'*:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\text{, односно } \vec{r} = x'\vec{i'} + y'\vec{j'} + z'\vec{k'},$$

гдје су $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$ ортови првих оса, а $\vec{\imath'}, \vec{\jmath'}, \vec{k'}$ ортови других (прим) оса. Зато што код транслације правци и смјерови одговарајућих оса остају исти, ми на основу њихових пројекција видимо:

Став 19.3.2.
Транслацијом се координате вектора не мјењају. ♦

Према томе, када проучавамо координате два вектора у два правоугла координатна система, можемо увијек узети да ти системи имају исти почетак.

Ортови $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$ и $\vec{\imath'}, \vec{\jmath'}, \vec{k'}$ координатних оса два правоугла координатна система чине два триједра ортогоналних јединичних вектора. Ако први триедар изражавамо помоћу другог, можемо писати

$$\begin{aligned}
\vec{i} &= (\vec{i}\cdot\vec{i'})\vec{i'} + (\vec{i}\cdot\vec{j'})\vec{j'} + (\vec{i}\cdot\vec{k'})\vec{k'},\\
\vec{j} &= (\vec{j}\cdot\vec{i'})\vec{i'} + (\vec{j}\cdot\vec{j'})\vec{j'} + (\vec{j}\cdot\vec{k'})\vec{k'},\\
\vec{k} &= (\vec{k}\cdot\vec{i'})\vec{i'} + (\vec{k}\cdot\vec{j'})\vec{j'} + (\vec{k}\cdot\vec{k'})\vec{k'}.
\end{aligned}$$

Примјетимо, када други триједар изражавамо помоћу првог, имамо опет исте коефицијенте (скаларне производе вектора у заградама) трансформација, јер је скаларно (унутрашње) множење вектора комутативно. Даље, из

$$\begin{aligned}
\vec{i}\cdot\vec{i'} &= |\vec{i}|\cdot|\vec{i'}|\cdot\cos(\vec{i},\vec{i'}) = \cos(x,x') = a_{xx},\\
\vec{i}\cdot\vec{j'} &= |\vec{i}|\cdot|\vec{j'}|\cdot\cos(\vec{i},\vec{j'}) = \cos(x,y') = a_{xy}, \ldots
\end{aligned}$$

и слично за остале скаларне производе ортова:

$$\begin{aligned}
&\vec{i}\cdot\vec{i'} = a_{xx},\ \vec{i}\cdot\vec{j'} = a_{xy},\ \vec{i}\cdot\vec{k'} = a_{xz},\\
&\vec{j}\cdot\vec{i'} = a_{yx},\ \vec{j}\cdot\vec{j'} = a_{yy},\ \vec{j}\cdot\vec{k'} = a_{yz},\\
&\vec{k}\cdot\vec{i'} = a_{zx},\ \vec{k}\cdot\vec{j'} = a_{zy},\ \vec{k}\cdot\vec{k'} = a_{zz}.
\end{aligned}$$

На тај начин добијамо формуле за трансформацију ортова правоуглих координатних оса. Упоредимо ли ове формуле са напријед датом шемом девет косинуса, види се правилност. Помножимо ли добивене векторске једначине скаларно са вектором $\vec{r}$, добићемо формуле за трансформацију правоуглих координата вектора, исте структуре као код ортова:

Став 19.3.3.

$$x = a_{xx}x' + a_{xy}y' + a_{xz}z' \text{, односно } x' = a_{xx}x + a_{xy}y + a_{xz}z,$$
$$y = a_{yx}x' + a_{yy}y' + a_{yz}z' \text{, односно } y' = a_{yx}x + a_{yy}y + a_{yz}z,$$
$$z = a_{zx}x' + a_{zy}y' + a_{zz}z' \text{, односно } z' = a_{zx}x + a_{zy}y + a_{zz}z. \blacklozenge$$

Детерминанта трансформације правоуглих координата, према претходном ознакама је

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{xx} & a_{xy} & a_{xz} \\ a_{yx} & a_{yy} & a_{yz} \\ a_{zx} & a_{zy} & a_{zz} \end{vmatrix}.$$

Коефицијенти ове детерминанте су косинуси углова између оса, индекса, два система. Према претходним резултатима, координате ортова првог, изражне помоћу другог система су:

$$\vec{\imath} = (a_{xx}, a_{xy}, a_{xz}),\ \vec{\jmath} = (a_{yx}, a_{yy}, a_{yz}),\ \vec{k} = (a_{zx}, a_{zy}, a_{zz}).$$

Скаларним (унутрашњим) множењем ортова добијамо

$$a_{xx}^2 + a_{xy}^2 + a_{xz}^2 = 1,\ a_{yx}^2 + a_{yy}^2 + a_{yz}^2 = 1,\ a_{zx}^2 + a_{zy}^2 + a_{zz}^2 = 1,$$
$$a_{yx}a_{zx} + a_{yy}a_{zy} + a_{yz}a_{zz} = 0,\ a_{zx}a_{xx} + a_{zy}a_{xy} + a_{zz}a_{xz} = 0,\ a_{xx}a_{yx} + a_{xy}a_{yy} + a_{xz}a_{yz} = 0.$$

Горње три релације су познате релације за косинусе смјера сваке орјентисане праве у правоуглом координатном систему. Доње три релације указују да су осе првог система међусобно окомите.

Ако сада израчунамо мјешовити производ вектора за ортове првог система $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$ изражене помоћу координата другог, добијамо

$$[\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}] = \pm \begin{vmatrix} a_{xx} & a_{xy} & a_{xz} \\ a_{yx} & a_{yy} & a_{yz} \\ a_{zx} & a_{zy} & a_{zz} \end{vmatrix} = \pm\Delta,$$

где предзнак зависи од (десне, или лијеве) орјентације система. Са друге стране, множећи непосредно добијамо $[\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}] = \pm 1$, где предзнак зависи од (десне, или

лијеве) орјентације система. Дакле, ако су први и други систем исте орјентације биће $\Delta = +1$, а ако нису $\Delta = -1$.

Међу ортовима имамо и релације за векторско (вањско) множење

$$\vec{i} = \pm \vec{j} \times \vec{k}\,,\ \vec{j} = \pm \vec{k} \times \vec{i}\,,\ \vec{k} = \pm \vec{i} \times \vec{j}\,.$$

Координате вектора $\vec{\imath}$ у другом (прим) систему су a_{xx}, a_{xy}, a_{xz}, а координате вектора $\vec{j} \times \vec{k}$ у истом систему су $\pm(a_{yy}a_{zz} - a_{yz}a_{zy})$, $\pm(a_{yz}a_{zx} - a_{yx}a_{zz})$, $\pm(a_{yx}a_{zy} - a_{yy}a_{zx})$. Знак плус треба узети у случају десне орјентације, а минус лијеве. Дакле, када оба система имају исту орјентацију, имамо

$$a_{xx} = +(a_{yy}a_{zz} - a_{yz}a_{zy})\,,\ a_{xy} = +(a_{yz}a_{zx} - a_{yx}a_{zz})\,,\ a_{xz} = +(a_{yx}a_{zy} - a_{yy}a_{zx})\,,$$

а када имају различите орјентације сва три предзнака биће минус. Изрази у заградама су кофактори елемената a_{xx}, a_{xy}, a_{xz} детерминанте трансформације. Слично добијамо за елементе другог и трећег реда те детерминанте, посматрајући друге двије векторске релације. Тако се долази до нових девет релација међу коефицијентима трансформације правоуглих координата:

Став 19.3.4.

- Детерминанта трансформације је $\Delta = \pm 1$, гдје је предзнак плус ако су оба система исте орјентације, иначе је минус.
- Сваки елеменат детерминанте трансформације једнак је своме кофактору са истим или промјењеним знаком, према томе да ли координатни системи имају исту орјентацију или не. ♦

У следећих неколико примјера посматрамо векторе који се налазе **у једној равни**. Прије тога, подсјетимо се основних конвенција.

Нека је јединични вектор управан на раван, са почетком у равни, уперен у онај дио простора из којег гледамо на раван. Узмимо да је смјер обртања углова у равни позитиван (супротан смјеру казаљке на сату).

Под углом $(\overrightarrow{r_1}, \overrightarrow{r_2})$ се подразумјева угао за који треба обрнути први вектор, око тачке O у позитивном смјеру, да би добио правац и смјер другог вектора. Основни од тих углова је између 0 и 2π, а сви остали се добијају када основном углу додамо $2k\pi$, гдје је k произвољан цијели број. Угао $-(\overrightarrow{r_1}, \overrightarrow{r_2})$ је онда угао за који треба обрнути први вектор око тачке O у равни у негативном смјеру да би имао правац и смјер другог вектора. Биће $(\overrightarrow{r_1}, \overrightarrow{r_2}) - (\overrightarrow{r_1}, \overrightarrow{r_2}) = 2k\pi$.

Правоугле координате вектора у равни одређују двије окомите осе: x-оса и y-оса. Прва се зове апсциса, друга је ордината. Координатне осе постављамо тако да је угао између њих $(x, y) = \frac{\pi}{2}$.

Примјер 19.3.5.
Наћи правоугле координате вектора $\vec{r}$ у равни Oxy.

Рјешење: Вектор $\vec{r}$ у равни одређен је са два броја, својим правоуглим координатама $r_x = |\vec{r}|\cos(x, \vec{r})$, $r_y = |\vec{r}|\sin(y, \vec{r})$. Како за углове важи $(x, \vec{r}) + (\vec{r}, y) = (x, y) + 2k\pi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, то је $(y, \vec{r}) = (x, \vec{r}) - \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, па је $\cos(y, \vec{r}) = \sin(x, \vec{r})$. Према томе, правоугле координате вектора $\vec{r}$ у равни Oxy су

$$r_x = |\vec{r}|\cos(x, \vec{r}), \quad r_y = |\vec{r}|\sin(x, \vec{r}).$$

Апсолутна вриједност, модул истог вектора је $|\vec{r}| = \sqrt{r_x^2 + r_y^2}$.♦

Примјер 19.3.6.
Нека је правоугли систем заротиран за угао $(x, x') = \alpha$ око исходишта у равни Oxy. Наћи формуле трансформације.

Рјешење: У систему исте орјентације, имамо:

$$(x, x') = \alpha,\ a_{xx} = \cos\alpha,$$
$$(x, y') = (x, x') + (x', y') = \alpha + \pi/2,\ a_{xy} = -\sin\alpha,$$
$$(y, x') = (y, x) + (x, x') = -\pi/2 + \alpha,\ a_{yx} = \sin\alpha,$$
$$(y, y') = (y, x) + (x, y') = -\pi/2 + \alpha + \pi/2,\ a_{yy} = \cos\alpha.$$

Како је $z = z' = 0$, добијамо формуле трансформације

$$\vec{\imath} = \vec{\imath}'\cos\alpha - \vec{\jmath}'\sin\alpha,$$
$$\vec{\jmath} = \vec{\imath}'\sin\alpha + \vec{\jmath}'\cos\alpha.$$

У обрнутим формулама, минус прелази испред синуса у другој формули. Скаларним множењем са $\vec{r}$ добијамо формуле за трансформацију правоуглих координата вектора у равни у координатним системима исте орјентације

$$x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha,$$
$$y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha.$$

Те смо формуе већ помињали (примјер 19.3.1.) без доказа. У обрнутим трансформацијама добићемо само доњи синус са негативним предзнаком.

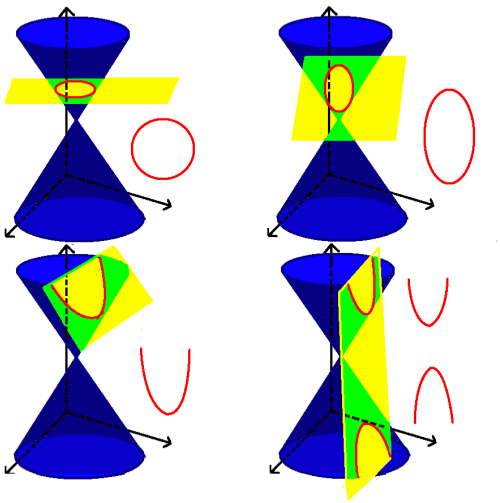
За системе различите орјентације, радећи аналогно, добијамо

$$x = x'\cos\alpha + y'\sin\alpha,$$
$$y = x'\sin\alpha - y'\cos\alpha.$$

Овдје, у обрнутим трансформацијама имамо исту форму.♦

VI Аналитичка геометрија

У наставку ћемо продубити разумјевање координатне геометрије, тј. **аналитичке геометрије**, радећи са једначнама **кривих другог реда**, у 2-димензионалном правоуглом систему координата. То су једначине кружнице, елипсе, параболе и хиперболе, нама од раније познатих конусних пресјека.



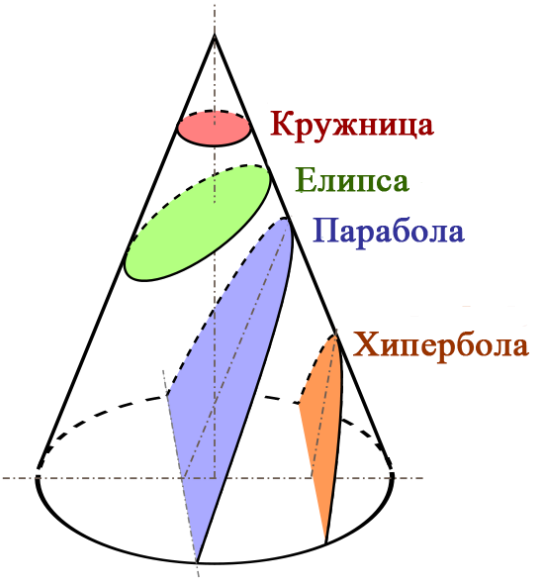
На слици лијево горе, пресјек конуса, односно купе и равни окомите на осу купе је **кружница**.

На следећој горњој слици, пресјек је **елипса**, када раван сасвим продире кроз купу, а није окомита на њену осу.

На трећој слици (доња лијево), пресјек је **парабола**, јер је раван паралелна са супротном изводницом купе.

На четвртој слици, доњој десно, пресјек је **хипербола**, када је раван паралелна са осом купе.

Исте резултате прегледно видимо на слици купе десно. Детаљније о овоме погледајте у поднаслову **11.1. Конусни пресјеци**, гдје су и докази да ови пресјеци имају следеће дефиниционе особине кривих другог реда.



Елипса је геометријско мјесто тачака у равни чији је збир удаљености од двије фиксне тачке константан. **Кружница** је посебан случај елипсе када се фиксне тачке поклапају.

Парабола је геометријско мјесто тачака у равни чија је удаљеност од једне фиксне тачке и праве те равни једнака.

Хипербола је геометријско мјесто тачака у равни чија је разлика удаљености од двије фиксне тачке константна

Конусне пресјеке називамо и **криве другог реда** јер је општа једначина конусних пресјека

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

при чему

- ако је $B^2 - 4AC < 0$ крива је елипса, кружница, тачка, или нема криве;
- ако је $B^2 - 4AC = 0$ крива је парабола, двије праралелне праве, једна права, или нема криве;
- ако је $B^2 - 4AC > 0$ крива је хипербола, или двије праве које се сјеку.

Посебно, **једначина тангенте** на криву другог реда у тачки $T(x_0, y_0)$, која припада кривој, је

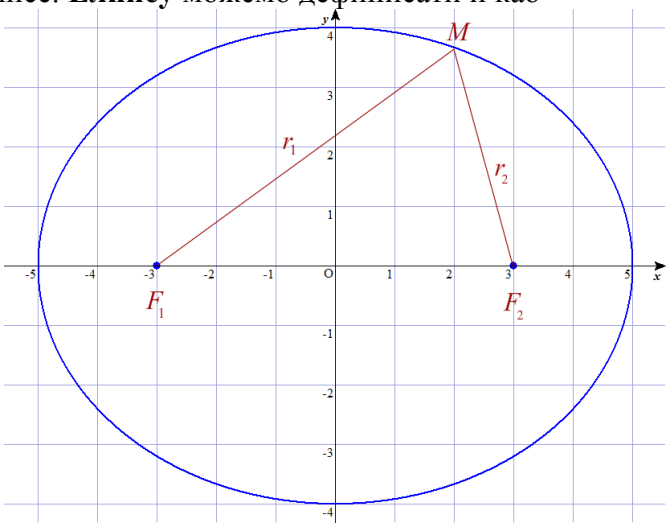
$$Axx_0 + \frac{B}{2}(xy_0 + x_0y) + Cyy_0 + \frac{D}{2}(x + x_0) + \frac{E}{2}(y + y_0) + F = 0.$$

Ако тачка T не припада кривој, онда је то једначина **поларе**, праве која пролази кроз додирне тачке тангенти на криву повучених из тачке T. У овом другом случају се тачка T назива **пол**.

20. Кружница

Кружница је специјални случај елипсе. **Елипсу** можемо дефинисати и као геометријско мјесто тачака у равни чији је збир удаљености до двије фиксне тачке константан. На слици десно,

$$r_1 + r_2 = const. \text{ тј.}$$
$$F_1M + F_2M = 2a.$$



Лако се увјерити да је

$$a = 5.$$

Иначе, једначина елипсе је

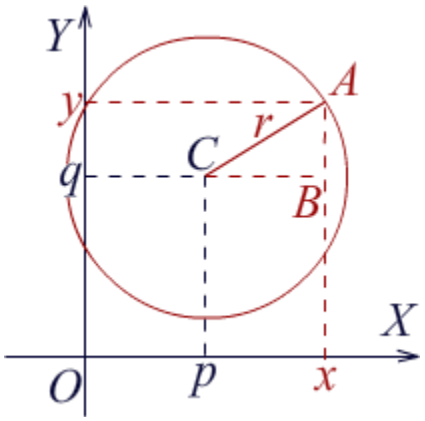
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

гдје су тзв. велика и мала полуоса овдје $a = 5$ и $b = 4$.

Посебни случај, кружницу са центром у исходишту $O(0,0)$ и са полупречником r добијемо када ставимо $a = b = r$, а тада се тачке F_1 и F_2, тзв. **фокуси елипсе**, поклапају у тачки коју називамо **центар кружнице**.

20.1. Једначине кружнице

Дефиниција 20.1.1.
Кружница, или кружна линија је геометријско мјесто тачака у равни једнако удаљених, за константну дужину коју зовемо **полупречник кружнице**, од једне фиксне тачке, коју зовемо **центар кружнице**.♦



На слици лијево, фиксна тачка је $C(p, q)$, а константна удаљеност, од ње до произвољне тачке на кружници $A(x, y)$ је полупречник r. Пројекције тачке C на Y-осу и тачке A на X-осу сјеку се у тачки $B(x, q)$. Троугао ABC је правоугли, са катетама $BC = x - p$, $AB = y - q$ и хипотенузом $AC = r$. Према Питагориној теореми, имамо идентитет

$$(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2 .$$

То је једначина кружнице **у канонском облику** у равни Декартовог правоуглог система координата. Квадрирањем и сређивањем добијамо њен **развијени облик**

$$x^2 + y^2 - 2px - 2qy + p^2 + q^2 - r^2 = 0 .$$

У случају када је $C = O$, тј. $p = q = 0$, имамо тзв. **централну кружницу**

$$x^2 + y^2 = r^2 .$$

Упоредимо општи развијени облик једначине кружнице са основним обликом једначине криве другог реда

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 .$$

Множењем развијеног облика са произвољним реалним бројем (различитим од нуле) непосредно налазимо $A = C \neq 0$ и $B = 0$, из чега лако слиједи $B^2 - 4AC < 0$.

Даље, једначину $Ax^2 + Ay^2 + Dx + Ey + F = 0$, $A \neq 0$ прво напишеимо у облику $x^2 + y^2 + \frac{D}{A}x + \frac{E}{A}y + \frac{F}{A} = 0$, затим $\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{2A}\right)^2 = \frac{D^2 + E^2 - 4AF}{4A^2}$. Да би ова једначина представљала кружницу, број на десној страни једнакости мора представљати њен полупречник, те мора бити испуњен услов $D^2 + E^2 - 4AF > 0$. Дакле, да би основна једначина криве другог реда била кружница потребно је и довољно да је $B = 0$, $A = C$ и $D^2 + E^2 - 4AF > 0$. Њен центар је $\left(-\frac{D}{2A}, -\frac{E}{2A}\right)$, а полупречник $r = \frac{1}{2|A|}\sqrt{D^2 + E^2 - 4AF}$.

Примјер 20.1.2.
Одредити центар и полупречник кружнице $3x^2 + 3y^2 + 26x - 32y = 0$.

Резултат: $\left(x+\frac{13}{3}\right)^2+\left(y-\frac{16}{3}\right)^2=\frac{425}{9}$, тј. $C\left(-\frac{13}{3},\frac{16}{3}\right)$ и $r=\frac{5\sqrt{17}}{3}\approx 6{,}87.\blacklozenge$

Познато је да је кружница једнозначно одређена са **три тачке** које не леже на истом правцу. Те тачке дефинишу врхове троугла, а центар описане кружнице троугла се налази у пресјеку симетрала страница. Удаљеност центра до било које од три дате тачке је полупречник кружнице.

Други начин за одређивање кружнице кроз три тачке је написати општу једначину кружнице, у канонском или развијеном облику, уврстити координате датих тачака и рјешити систем.

Примјер 20.1.3.
Одредити једначину кружнице која пролази тачкама $A(2,-2)$, $B(7,3)$, $C(6,0)$.

Рјешење: Уврстимо координате тачака у канонски облик једначине кружнице

$$(2-p)^2+(-2-q)^2=r^2$$
$$(7-p)^2+(3-q)^2=r^2$$
$$(6-p)^2+q^2=r^2.$$

Од прве једначине одузмемо другу, од друге трећу и добијамо

$$p+q=5 \text{ и } p+3q=11,$$

а отуда $p = 2$ и $q = 3$. Једначина тражене кружнице гласи

$$(x-2)^2+(y-3)^2=25.\blacklozenge$$

Примјер 20.1.4.
Наћи једначину кружнице која иде тачом $T(3,6)$ и додирује обе координатне осе.

Рјешење: Обзиром да кружница додирује обе координатне осе, имамо $p = q = r$. Услов да тачка $T(3,6)$ припада кружници води до једначине $(3-r)^2+(6-r)^2=r^2$, тј. $r^2-18r+45=0$ чија рјешења су $r_1 = 15$, $r_2 = 3$. Према томе, постоје двије тражене кружнице: $(x-15)^2+(y-15)^2=225$ и $(x-3)^2+(y-3)^2=9.\blacklozenge$

Примјер 20.1.5.
Дата је кружница са центром $C_1(-1,-1)$ и полупречником $r_1 = 4$. Наћи кружницу са центром $C_2(2,3)$ а која прву кружницу сјече под правим углом.

Рјешење: На слици десно су C_1T и C_2T полупречници r_1 и r_2 који леже на

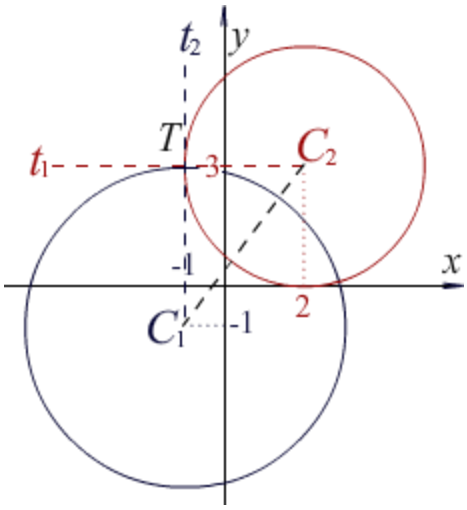
тангентама t_1 и t_2 датих кружница. Како је $\angle(t_1,t_2) = 90°$, то је троугао C_1C_2T правоугли. Према Питагориној теореми је

$$|C_1T|^2 + |C_2T|^2 = |C_1C_2|^2.$$

Отуда закључак, двије **кружнице су ортогоналне** (тангенте у њиховим сјециштима сјеку се под правим углом) онда и само онда ако је квадрат удаљености њихових центара једнак збиру квадрата њихових полупречника

$$|C_1C_2|^2 = r_1^2 + r_2^2.$$

Сада, из $\left(\sqrt{(2+1)^2+(3+1)^2}\right)^2 = 16 + r_2^2$ слиједи $r_2 = 3$. Једначина друге кружнице гласи $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 9$. ♦



Задаци 20.1.6.

1. Дате су три кружнице $x^2 + y^2 - 4x + 8y + 11 = 0$, $x^2 + y^2 + 16x - 12y + 99 = 0$ и $x^2 + y^2 - 4y - 12 = 0$. Свести их на канонски облик и наћи површину троугла коме су врхови средишта кружница.

[20]

2. Тачка $T(1,1)$ је на кружници $x^2 + y^2 + 4x + 6y - 12 = 0$. Одредити другу крајњу тачку пречника.

[(-5,-7)]

3. Центар кружнице је $C(6,3)$. Како гласи њена једначина, ако кружница на x-оси одсјеца тетиву дужине 4 ?

$[(x-6)^2 + (y-3)^2 = 13]$

4. Написати једначину кружнице која пролази тачкама (2, 1) и (6, 3), а центар јој је на апсциси.

$[(x-5)^2 + y^2 = 10]$

5. Наћи једначину кружнице чији пречник одсјечак праве $3x - 4y + 12 = 0$ између координатних оса.

6. Наћи једначину кружнице чији центар је пресјек правих $2x - y - 8 = 0$ и $x + y - 1 = 0$, и која пролази тачком прве праве са апсцисом 5.

7. Наћи једначину кружнице чији је пречник дуж $A(2, 7)$, $B(-1, 4)$.

8. Наћи једначину кружнице која додирује тачку $T(2, 3)$ и апсцису у тачки 5.

9. Наћи једначину кружнице која пролази тачком $T_1(4, 10)$ и додирује праву $4x + 3y + 3 = 0$ у тачки $T_2(-3, 3)$.

10. Одредити једначину кружнице чији центар лежи на кружници $x^2 + y^2 = 50$ и која пролази тачкама $T_1(3, 4)$ и $T_2(4, 5)$.

11. Одредити једначину кружнице описане око троугла којег формирају праве $12x + y + 30 = 0$, $5x - 2y - 2 = 0$, $2x + 5y - 24 = 0$.

12. Наћи скуп тачака равни из којих се дуж A(1, 6), B(7, -2) види под правим углом.

13. Прва кружница има центар $C_1(-3, 4)$ и полупречник $r_1 = 2$. Наћи једначину кружнице са центром у исходишту, а која се додирује са првом.

14. Наћи једначину кружнице која ортогонално сјече кружницу $(x - 14)^2 + y^2 = 64$ и додирује обе координатне осе.

15. Наћи једначину кружнице са центром $C(3, -1)$ која на правој $2x - 5y + 18 = 0$ одсјеца тетиву дужине 6.

20.2. Кружница и права

Права и кружница се могу сјећи у двије тачке, додиривати се, или мимоилазити. Ако су дати права $y = kx + l$ и кружница $(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$, њихове заједничке тачке тражимо рјешавајући систем једначина.

Прво, смјеном добијамо једначину са једном непознатом $(x - p)^2 + (kx + l - q)^2 = r^2$, коју сводимо на основни облик квадратне једначине

$$(1 + k^2)x^2 + 2(kl - kq - p)x + (p^2 + q^2 + l^2 - r^2 - 2ql) = 0.$$

Дискриминанта ове квадратне једначине послије сређивања постаје

$$4\left(r^2(1 + k^2) - (kp - q + l)^2\right).$$

Отуда закључујемо:

Теорема 20.2.1.

i. ако је $r^2(1 + k^2) - (kp - q + l)^2 > 0$, права и кружница **се сјеку** у двије тачке;
ii. ако је $r^2(1 + k^2) - (kp - q + l)^2 = 0$, права и кружница **се додирују**;
iii. ако је $r^2(1 + k^2) - (kp - q + l)^2 < 0$, права и кружница **се мимоилазе.** ♦

Посебно нам је занимљив други случај (ii.). То је **тангента на кружницу**.

Услов да је права $y = kx + l$ тангента на дату кружницу можемо наћи и коришћењем формуле за удаљеност тачке од праве. Наиме, удаљеност центра $C(p, q)$ од те праве је $d = \frac{|q - kp - l|}{\sqrt{1 + k^2}}$. Ако је права $y - kx - l = 0$ тангента кружнице, тада је $d = r$.

Квадрирањем и узимањем да је $|a|^2 = a^2$ добијамо

$$r^2(1+k^2)=(q-kp-l)^2,$$

тј. исти услов да је права тангента кружнице.

Посебно, у случају **централне кружнице** $x^2+y^2=r^2$, услов да је дата права тангента кружнице постаје $r^2(1+k^2)-l^2=0$.

Теорема 20.2.2.
Једначина тангенте на кружницу са центром $C(p, q)$ и полупречником r у њеној тачки $T(x_1, y_1)$ је

$$(x-p)(x_1-p)+(y-q)(y_1-q)=r^2.$$

Доказ: Нека се дата кружница и права $y=kx+l$ се додирују у датој тачки. Права CT има коефицијент правца $k_{CT}=\frac{y_1-q}{x_1-p}$ и нормална је на тангенту, па је коефицијент тангенте $k=-\frac{1}{k_{CT}}=-\frac{x_1-p}{y_1-q}$. Тачка $T(x_1, y_1)$ припада и тангенти, те је $y=kx_1+l$, отуда $l=y_1-kx_1$ и добијамо $l=y_1+\frac{x_1-p}{y_1-q}x_1$. Дакле, једначина тангенте у тачки додира је

$$y=-\frac{x_1-p}{y_1-q}x+y_1+\frac{x_1-p}{y_1-q}x_1, \text{ тј.}$$

$$(x_1-p)(x-x_1)+(y_1-q)(y-y_1)=0.$$

Даље, ову једначину пишемо у облику

$$(x-p+p-x_1)(x_1-p)+(y-q+q-y_1)(y_1-q)=0, \text{ затим}$$

$$(x-p)(x_1-p)+(y-q)(y_1-q)-(x_1-p)^2-(y_1-q)^2=0,$$

па због $(x_1-p)^2+(y_1-q)^2=r^2$ добијамо једначину коју смо и требали доказати

$$(x-p)(x_1-p)+(y-q)(y_1-q)=r^2.\blacklozenge$$

Примјер 20.2.3.
У случају централне кружнице $x^2+y^2=r^2$ једначина тангенте у тачки додира (x_1, y_1) постаје $xx_1+yy_1=r^2.\blacklozenge$

Примјер 20.2.4.
Ако је кружница дата у облику $x^2+y^2+ax+by+c=0$ тада се њена једначина може писати $\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\left(y+\frac{b}{2}\right)^2=\frac{1}{4}(a^2+b^2-4c)^2$, па на основу претходне теореме добијамо једначину њене тангенте у тачки додира (x_1, y_1):

$\left(x+\frac{a}{2}\right)\left(x_1+\frac{a}{2}\right)+\left(y+\frac{b}{2}\right)\left(y_1+\frac{b}{2}\right)=\frac{1}{4}(a^2+b^2-4c)$, или након сређивања

$xx_1+yy+\frac{a}{2}(x+x_1)+\frac{b}{2}(y+y_1)+c=0$.♦

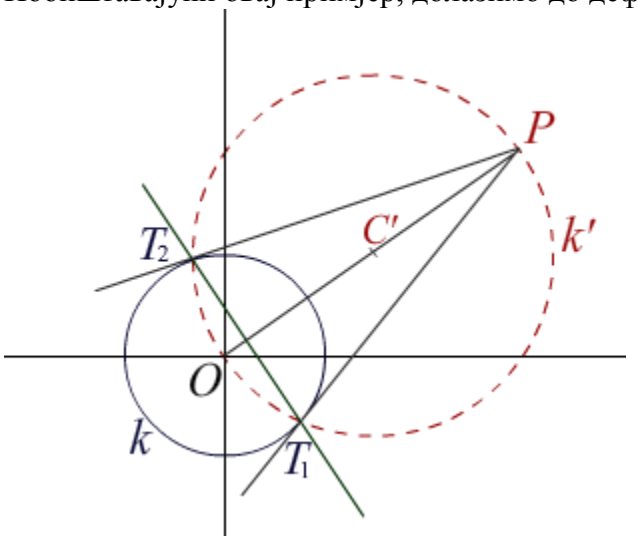
Како повући тангенту на кружницу из тачке $P(x_0, y_0)$ изван кружнице? Прво погледајмо следећи примјер.

Примјер 20.2.5.
Наћи једначине тангенти повучених из $P(8, 10)$ на кружницу $(x-2)^2+(y-3)^2=4$.

I Рјешење: Одредићемо тачку додира $T(x_1, y_1)$. Зато што тачка додира лежи на кружници биће $(x_1-2)^2+(y_1-3)^2=4$, а зато што тачка $P(8, 10)$ лежи на тангенти биће $(8-2)(x_1-2)+(10-3)(y_1-3)=4$. Рјешавањем овог система једначина, добијамо двије тачке додира $T_1\left(\frac{64}{17},\frac{35}{17}\right)$ и $T_2\left(\frac{4}{5},\frac{23}{5}\right)$. Уврстимо ли координате диралишта у једначину тангенте имамо $(x-2)\left(\frac{64}{17}-2\right)+(y-3)\left(\frac{35}{17}-3\right)=4$, $(x-2)\left(\frac{4}{5}-2\right)+(y-3)\left(\frac{23}{5}-3\right)=4$. Тражене тангенте су $15x-8y-40=0$ и $3x-4y+16=0$.

II Рјешење: Користићемо услов додира. Тангента пролази тачком $P(8, 10)$, а њене координате задовољавају једначину $y=kx+l$. Такође, задовољен је и услов додира $4(k^2+1)=(3-2k-1)^2$. Отуда добијамо исте тангенте $15x-8y-40=0$ и $3x-4y+16=0$.♦

Поопштавајући овај примјер, долазимо до дефиниције **пола и поларе кружнице**.



Треба повући тангенте из тачке $P(x_0, y_0)$ на централну кружницу $x^2+y^2=r^2$. Диралишта тражених тангената налазимо у пресјеку дате кружнице (k) с кружницом (k') над пречником OP, као што се види на слици лијево.

Центар кружнице k' је $C'\left(\frac{x_0}{2},\frac{y_0}{2}\right)$, а полупречник је $\sqrt{\left(\frac{x_0}{2}\right)^2+\left(\frac{y_0}{2}\right)^2}$,

па кружница k' има једначину $\left(x-\frac{x_0}{2}\right)^2+\left(y-\frac{y_0}{2}\right)^2=\left(\frac{x_0}{2}\right)^2+\left(\frac{y_0}{2}\right)^2$, тј. $x^2+y^2-xx_0-yy_0=0$. Узимајући у обзир једначину кружнице k, добијамо

$$x_0\cdot x+y_0\cdot y=r^2$$

је права која спаја тачке T_1 и T_2. Ту праву називамо **полара** тачке P с обзиром на кружницу k. Тачку P називамо **пол** те поларе.

Транслацијом координатног система, тако да исходиште система $x'O'y'$ буде у центру $C(p, q)$ кружнице налазимо једначину **поларе нецентралне кружнице**

$$(x_0-p)(x-p)+(y_0-q)(y-q)=r^2$$

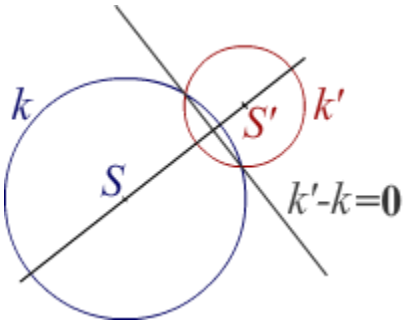
у систему xOy.

Из геометрије знамо (задатак 7.) да када из исте тачке T изван кружнице k повучемо тангенту (TT_1) и секанту (TK_1K) на ту кружницу, гдје су K и K_1 тачке пресјека секанте и кружнице, тада је дужина тангенте средња геометријска пропорционала између одсјечака на секанти, тј. $TK_1\cdot TK=TT_1^2$. Тај производ зовемо потенција тачке T изван k у односу на k.

Наиме, троуглови TKT_1 и TKT_1 имају једнаке углове у тјеменима T и у тјеменима K и T_1 па су слични (нацртај слику!). Отуда $TK : TT_1 = TT_1 : TK_1$, тј. $TK\cdot TK_1=(TT_1)^2$.

Сада се може дефинисати потенцијала. Одузимањем једначина двију кружница k и k' добијамо једначину праве. Права $k-k'=0$ зове се **потенцијала**, или радикална оса, или кардинала.

Ако су то кружнице $k:(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$ и $k':(x-p')^2+(y-q')^2=(r')^2$ тада је једначина њихове потенцијале $(x-p)^2+(y-q)^2-(x-p')^2-(y-q')^2=r^2-(r')^2$, тј. $2x(p'-p)+2q(q'-q)+p^2+q^2-r^2-(p')^2-(q')^2+(r')^2=0$. Коефицијент правца потенцијале је $k_p=-\frac{p'-p}{q'-q}$, док је коефицијент правца (називамо га **централа**) који пролази центрима кружница $C(p, q)$ и $C'(p', q')$, једнак $k_c=\frac{q'-q}{p'-q}$. Према томе, потенцијала и централа су двије међусобно окомите праве.



Када бисмо из било које тачке T потенцијале двије кружнице повукли тангенте на обе кружнице k и k', нашли бисмо да су дужине тих тангенти (до диралишта) међусобно једнаке. То значи да су потенције било које тачке потенцијале двију кружница међусобно једнаке. Отуда и назив потенцијала.

Када се кружнице додирују, потенцијала је њихова заједничка тангента окомита на централи. Када кружнице немају заједничких (реалних) тачака, потенцијала ипак постоји као релана окомица на централу.

Ако имамо три кружнице у равни, сваки пар тих кружница одређује по једну потенцијалу. Све три потенцијале пролазе кроз исту тачку, **радикално средиште** тих кружница.

Задаци 20.2.6.
1. Одредити број k тако да $y = kx + 10$ буде тангента кружне линије $x^2 + y^2 = 20$.

2. Одредити број a тако да права $3x - 4y + a = 0$ буде тангента кружне линије $x^2 + y^2 - 10y = 0$.

3. Одредити једначину кружне линије полупречника $2\sqrt{5}$ која додирује праве $x - 2y = 0$ и $x + 2y = 0$.
а) Рјешити задатак тражећи центар кружнице на симетрали угла датих правих.
б) Рјешити задатак помоћу услова додира кружне линије са датим правама.

4. Одредити једначине тангенти из тачке $T(1, 3)$ на кружницу $x^2 + y^2 = 5$, а затим наћи једначину поларе у односу на тачку T.

5. Наћи једначину поларе кружнице $x^2 + y^2 = 5$ у односу на пол $P(-1, 3)$, а затим написати једначине тангенти из тачке P на дату кружницу.

6. Наћи угао пресјека праве $3x - y = 1$ и кружнице $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 7 = 0$.

7. Доказати помоћу сличности троуглова: ако се кроз тачку T изван кружнице k повуче тангента TT_1 и секанта TK_1K тада је $TK_1 \cdot TK = TT_1^2$.

8. Наћи једначину тангенте круга паралелну датој правој.
а) $x^2 + y^2 - 6x + 8y - 50 = 0$, $2x - y + 3 = 0$.
б) $x^2 + y^2 - 10x - 12y + 36 = 0$, $4x - 3y + 12 = 0$.

9. Наћи једначину нормале круга у његовој тачки M.
а) $x^2 + y^2 + 4x - 4y - 17 = 0$, $M(2, 5)$.
б) $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 17 = 0$, $M(5, 6)$.

10. Под којим углом дата права сјече кружницу.
а) $4x - 3y = 0$, $x^2 + y^2 = 25$.
б) $3x + 2y = 0$, $x^2 + y^2 = 36$.

11. Одредити угао под којим се види круг из тачке T.
а) $x^2 + y^2 = 16$, $T(8, 0)$.
б) $x^2 + y^2 = 9$, $T(0, 6)$.

12. Одредити једначину круга који:
а) садржи координатни почетак, а праве $3x - 4y + 8 = 0$ и $3x + 4y + 8 = 0$ су му тангенте; **б**) садржи тачку $A(1, 1)$, а праве $7x + y - 3 = 0$ и $x + 7y - 3 = 0$ су му тангенте.

13. На кружници $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 12 = 0$ наћи најближу и најдаљу тачку тачки (10, 7).

[(7,5), (1,1)]

14. Која тачка кружнице $p = 2$, $q = 6$, $r = 5$ је најближа а која је најдаља од праве $4x + 3y - 101 = 0$?

[(6,9), (-2,3)]

15. На правој $x - 2y - 12 = 0$ одредити ону тачку из које се могу повући једнаке тангенте на кружнице $x^2 + y^2 + 2x + 4y = 0$ и $x^2 + y^2 - 14x - 10y + 54 = 0$. Затим израчунати дужину тангенте до диралишта.

[*Упутство*: Одузимањем једначина кружница, затим пресјек потенцијале и дате праве.]

16. Дате су кружнице $x^2 + y^2 + 2y - 4 = 0$ и $x^2 + y^2 - 8x - 6y - 4 = 0$. Одредити ону тачку у равни из које се могу повући тангенте дужине $d = 4\sqrt{5}$ на обе кружнице.

[*Упутство*: Наћи једначину кружнице полупречника d. Затим, наћи пресјек те кружнице и поларе. (7,-7), (-6,6)]

17. Помоћу једначине поларе одредити једначине тангенти повучених из тачке (-2,5) на кружницу $(x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 5$.

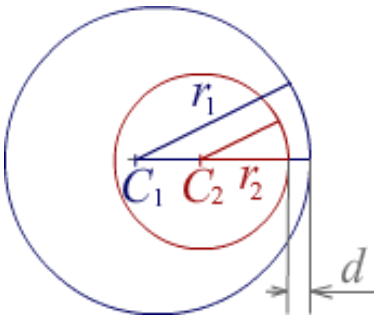
18. Наћи координате пола ако је задата једначина кружнице $x^2 + y^2 - 8x + 12y - 12 = 0$ и једначина поларе $3x + 12y - 4 = 0$.

20.3. Двије кружнице

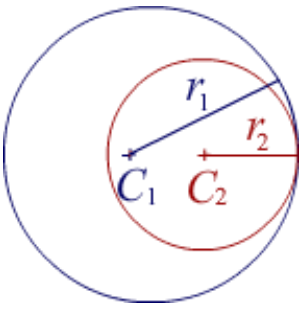
Кружнице су **концентричне** када имају заједнички центар ($C_1 = C_2$), а различите полупречнике ($r_1 \neq r_2$). Двије **ексцентричне** ($C_1 \neq C_2$) кружнице могу имати следећих пет међусобних положаја.

i. Једна кружница је унутар друге. Удаљеност њихових центара је мања од (апсолутне) разлике њихових полупречника, тј. $C_1C_2 < |r_1 - r_2|$.
ii. Кружнице се додирују изнутра. Удаљеност њихових центара је једнака (апсолутној) разлици полупречника, тј. $C_1C_2 = |r_1 - r_2|$.
iii. Кружнице се сјеку. Удаљеност центара је већа збира, а мања од разлике полупречника, тј. $|r_1 - r_2| < C_1C_2 < r_1 + r_2$.
iv. Кружнице се додирују извана. Удаљеност њихових центара једнака је збиру њихових полупречника, тј. $C_1C_2 = r_1 + r_2$.
v. Кружнице леже једна сасвим изван друге. Удаљеност њихових центара је мања од збира њихових полупречника, тј. $C_1C_2 > r_1 + r_2$.

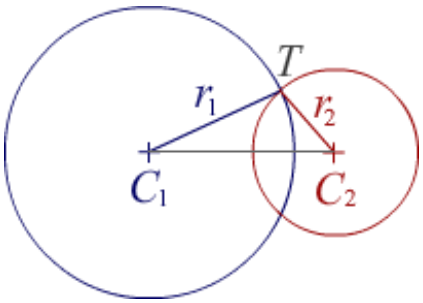
i. ii. iii.



$C_1C_2 + r_2 + d = r_1$

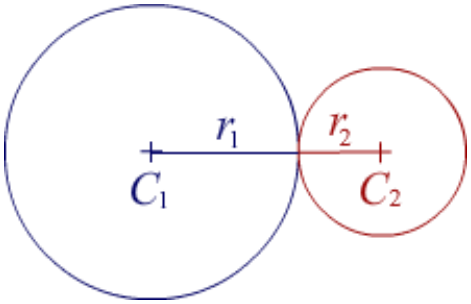


$C_1C_2 = r_1 - r_2$



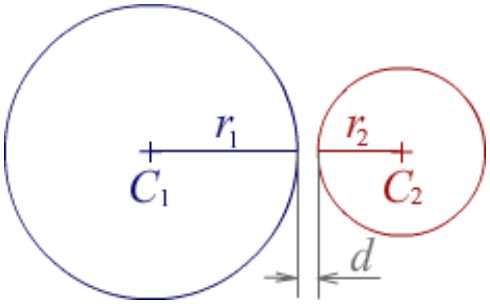
$r_1 - r_2 < C_1C_2 < r_1 + r_2$

iv.



$C_1C_2 = r_1 + r_2$

v.



$C_1C_2 = r_1 + d + r_2$

Примјер 20.3.1.
Одредити међусобни положај кружница $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 1$и $(x+2)^2 + (y+1)^2 = 9$.

Рјешење: **1. Начин**. Имамо $C_1(2,1)$, $r_1 = 1$ и $C_2(-2,-1)$, $r_2 = 3$. Према томе $C_1C_2 = \sqrt{(p_1-p_2)^2+(q_1-q_2)^2} = \sqrt{(2-(-2))^2+(1-(-1))^2} = \sqrt{(2+2)^2+(1+1)^2} = \sqrt{20}$, а $r_1 + r_2 = 4 = \sqrt{16}$, што значи да је $C_1C_2 > r_1 + r_2$, тј. кружнице леже једна изван друге.

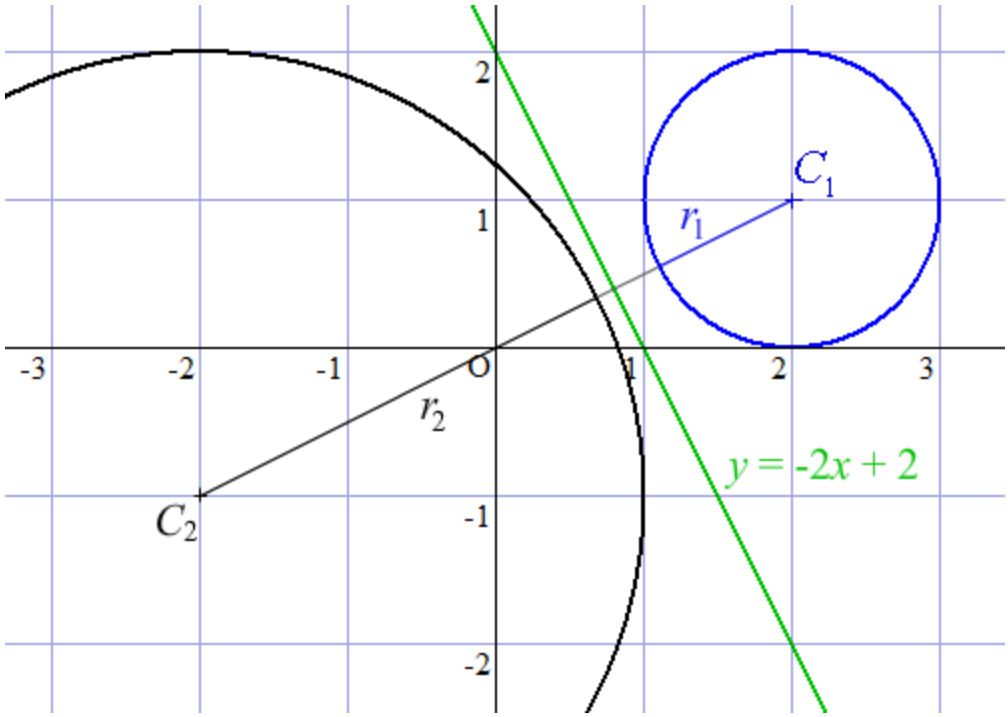
2. Начин. Напишимо обе дате једначине у развијеном облику:

$$x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0 \text{ и } x^2 + y^2 + 4x + 2y - 4 = 0.$$

Одузмемо ли другу једначину од прве, имамо праву:

$$y = -2x + 2.$$

Већ смо видјели да се ова права назива **полара кружница** и да стоји окомито у односу на **централу**, праву која спаја центре кружница. У случају да се кружнице сјеку, полара пролази пресјечним тачкама.



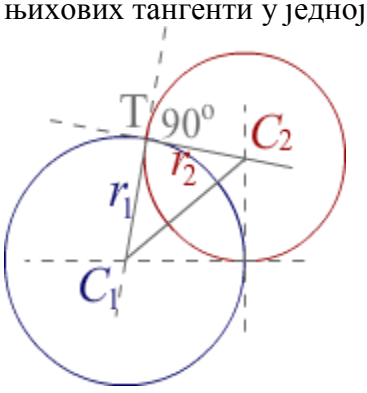
Одаберемо ли једну од квадратних једначина, рецимо прву, са поларом имамо еквивалентан систем:

$$x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0 \text{ и } y = -2x + 2.$$

То је систем квадратне и линеарне једначине који је лакше рјешити од заданог. Уврштавањем израза за y у прву једначину добивамо: $5x^2 - 8x + 4 = 0$, чија су рјешења $x_{12} = \frac{4 \pm 2i}{5}$. Увртавајући ова рјешења у другу, налазимо $y_{12} = \frac{2 \mp 4i}{5}$.

Дакле, задане кружнице немају (реалних) заједничких тачака. ♦

Ако се двије кружнице сјеку, угао између њих дефинишемо као угао између њихових тангенти у једној од тачака пресјека. Посебно, ако се двије кружнице сјеку под правим углом, кажемо да су оне **ортогоналне**.



Тангенте ортогоналних кружница, повучене у пресјечним тачкама (T), пролазе једна другој кроз центре (C_1 и C_2), јер су полупречници r_1 и r_2 у тој тачки окомити на тангенте.

На слици лијево, троугоао C_1C_2T је правоугли, па на основу Питагорине теореме, важи

$$|C_1C_2|^2 = r_1^2 + r_2^2,$$

гдје су C_1 и C_2 центри, а r_1 и r_2 полупречници ортогоналних кружница.

Задаци 20.3.2.

1. Одредити једначину кружне линије која је концентрична са кругом $x^2 + y^2 + 6x + 2y + 5 = 0$ и која пролази кроз тачку $M(1, -4)$.

2. Наћи узајамни положај кружница
i. $x^2 + y^2 = 5$ и $x^2 + y^2 - 8x + 8y + 30 = 0$;
ii. $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6 = 0$ и $x^2 + y^2 - 10x - 8y + 40 = 0$;
iii. $x^2 + y^2 - 8x - 18y + 93 = 0$ и $x^2 + y^2 - 8x - 8y + 23 = 0$;
iv. $x^2 + y^2 = 25$ и $2x^2 + 2y^2 - 4x - 3y - 25 = 0$.

3. Наћи једначину кружнице која има центар на y-оси, пролази кроз тачку (-2, -3), а сјече кружницу $(x + 7)^2 + (y - 4)^2 = 10$ под правим углом.

4. Наћи једначину кружне линије која пролази тачком (2, 2) и ортогонална је на обе кружнице $x^2 + y^2 = 4$ и $(x - 3)^2 + y^2 = 1$.

5. Наћи кружницу која пролази кроз тачке (-4, 3), (-2, -3) и ортогонална је на кружницу $(x - 3)^2 + y^2 = 16$.

6. Наћи (све четири) заједничке тангенте кружница:
i. $(x + 5)^2 + y^2 = 10$ и $(x - 5)^2 + y^2 = 40$;
ii. $x^2 + y^2 = 45$ и $x^2 + y^2 - 20x - 25 = 0$.

7. Под којим се углом сјеку кружнице:
i. $x^2 + y^2 = 29$, $(x + 2)^2 + (y - 5)^2 = 58$;
ii. $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 8$, $(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 2$?

8. Доказати да се око четвороугла $ABCD$ може описати круг и наћи једначину тог круга, ако је $A(5,6)$, $B(2,7)$, $C(-3,2)$, $D(-2,-1)$.

9. У пресјечним тачкама кругова $x^2 + y^2 = 10$ и $x^2 + y^2 - 6x - 6y + 2 = 0$ конструисане су тангенте на оба круга. Наћи површину четвороугла којег образују те тангенте.

10. У тачки $A(4,0)$ лука круга $x^2 + y^2 = r^2$ у првом квадранту конструисана је тангента на круг. Одредити на тој тангенту тачку T тако да је површина трапеза одређеног координатним осама и тангентама у A и из тачке T једнака датој вриједности k^2.

11. Наћи све тачке у равни чије координате задовољавају релацију:
i. $|x^2 + y^2 - 1| + (x - 1)^2 + (y - 1)2 = 1$;
ii. $|x^2 + y^2 - 2| = 2\,(x + y)$;
iii. $x^2 + y^2 = 2\,(|x| + |y|)$.

12. Наћи све тачке у равни чије координате задовољавају неједнакости:
i. $1 \le x^2 + y^2 \le 16$;
ii. $x^2 + y^2 \le 9$;
iii. $x + y \ge 0$;
iv. $y^2 \le 4 - x^2$, $3x + 2y - 3 \le 0$;
v. $x^2 + y^2 \le 2\,(|x| + |y|)$.

21. Елипса

Дефиниција 21.0.1.
Елипса (грч. *ἔλλειψις*, премало) је скуп свих тачака M у равни чије удаљености до једне фиксне тачке F те равни, коју називамо фокус, или **жижа елипсе**, и удаљености до једне сталне праве d исте равни, коју називамо **директриса елипсе** стоје у сталној размјери $e = const.$ ($0 < e < 1$), коју називамо **ексцентрицитет елипсе**. ♦

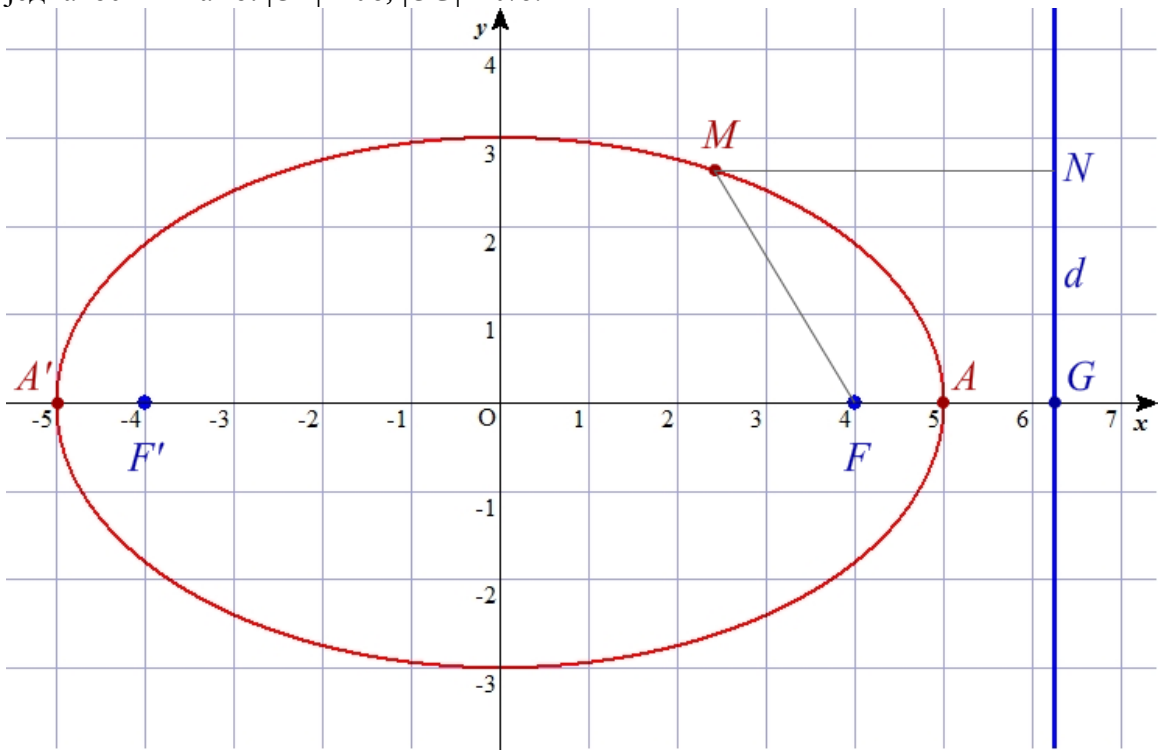
Другим рјечима, произвољна тачка M елипсе има особину да је

$$|FM| : |MN| = e,$$

при чему је e константан реалан број између нула и један. У наставку, прво дефинишемо основни координатни систем за проучавање елипсе. Елипсе у свим осталим положајима се даље могу добити највише једном транслацијом и једном ротацијом основне.

Дефиниција 21.0.2.
Нека је G подножје нормале из жиже F на директрису d. Нека су тачке A и A' на тој нормали и на елипси, тако да је $|FA| = e\cdot|AG|$ и $|FA'| = e\cdot|A'G|$. Нека је O средиште дужи AA'. За координатни почетак узмимо тачку O, осу Ox поставимо дуж праве OG, а осу Oy поставимо окомито на Ox, као на следећој слици. ♦

Ставимо ли да је $|A'A| = 2a$, тада $|A'O| = |OA| = a$, па због $|A'F| = |A'O| + |OF|$ и $|A'G| = |A'O| + |OG|$ добијамо $|A'O| + |OF| = e(|A'O| + |OG|)$, тј. $a + |OF| = e(|OG| + a)$. На сличан начин слиједи и једнакост $a - |OF| = e(|OG| - a)$. Из добијене двије једнакости имамо: $|OF| = ae$, $|OG| = a/e$.



Према томе, у овако изабраном координатном систему, жижа је тачка $F(ae, 0)$, а директриса је права d: $x = a/e$. Због симетрије, постоје још једна жижа $F'(-ae, 0)$ и друга директриса d: $x = -a/e$.

Број $c = ae$, који представља растојање жиже од центра елипсе, назива се **линеарни ексцентрицитет**, док је дужи назив за број $e = \frac{c}{a}$ **нумерички ексцентрицитет**. У наставку ћемо видјети да постоји број $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ такав да се једначина елипсе у датом координатном систему пише

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Бројеви a и b називају се велика и мала **полуоса елипсе**.

На претходној слици, $a = 5$, $e = 4/5$, па је $c = 4$, те је десни фокус $F(4, 0)$, а одговарајућа директриса: $x = 25/4$. Мала полуоса $b = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$.

21.1. Елементи елипсе

Став 21.1.1.
У претходно дефинисаном координатном систему (21.0.2.) тачака $M(x, y)$ припада елипси ако и само ако њене координате задовољавају једначину

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Доказ: Ставимо $b^2 = a^2(1 - e^2)$, тј. $e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ је ексцентрицитет.
i. Ако тачка $M(x, y)$ припада елипси, према претходној слици, тада је

$$|FM|^2 = (x - ae)^2 + y^2,\ |MN|^2 = \left(\frac{a}{e} - x\right)^2,$$

па из дефиниције елипсе имамо

$$(x - ae)^2 + y^2 = e^2\left(\frac{a}{e} - x\right)^2 = a^2(1 - e^2), \text{ или}$$
$$x^2(1 - e^2) + y^2 = a^2(1 - e^2), \text{ односно}$$
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1 - e^2)} = 1, \text{ тј.}$$
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

ii. Обрнуто, ако координате тачке $M(x, y)$ задовољавају дату једначину, имамо

$$y^2 = b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right).$$

Према томе, имамо $|FM|^2 = (x-ae)^2 + y^2 = (x-ae)^2 + b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right) =$

$$= (x-ae)^2 + a^2(1-e^2)\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)$$

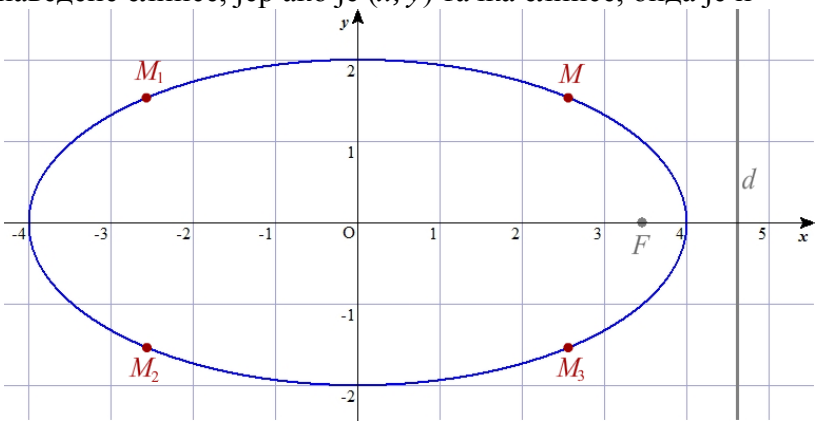
$$= x^2 - 2aex + a^2e^2 + (1-e^2)(a^2-x^2)$$

$$= e^2\left(x^2 - 2\frac{a}{e}x + \frac{a^2}{e^2}\right) = e^2\left(\frac{a}{e}-x\right)^2 = e^2|MN|^2,$$

што значи да тачка $M(x, y)$ припада елипси. ♦

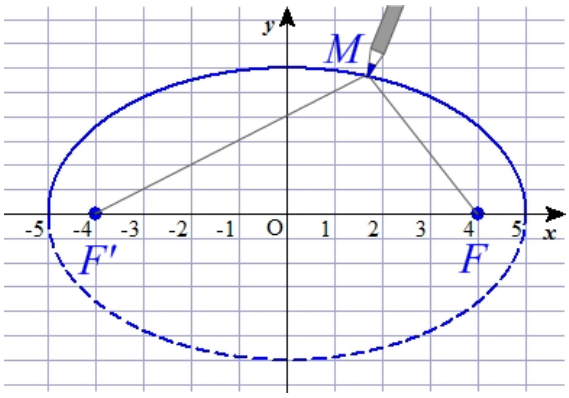
То је осна, или **канонска једначина** елипсе. Бројеви a и b називају се велика и мала **полуоса** елипсе.

Оса Oy је оса симетрије наведене елипсе, јер ако је (x, y) тачка елипсе, онда је и $(-x, y)$ тачка елипсе. Друга оса симетрије исте елипсе је оса Ox, јер ако је тачка (x, y) на елипси, онда је и $(x, -y)$ тачка на елипси. Према томе, за сваку тачку $M(x, y)$ која припада елипси, тачке $M_1(x, -y)$, $M_2(-x, -y)$ и $M_3(-x, y)$ такође припадају истој елипси. То је лако провјерити непосредним увртавањем у једначину. На слици горе десно је елипса $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}=1$ са полуосама $a = 4$ и $b = 2$.



Елипса садржи тачке $A(a, 0)$ и $A'(-a, 0)$, затим $B(0, b)$ и B'$(0, -b)$ и налазе се на срединама страница правоугаонка чије су странице одређене једначинама $x = a$, $x = -a$, $y = b$, y = $-b$. Права AA' назива се **велика** (главна) **оса** елипсе, а права BB' назива се **мала** (споредна) **оса** елипсе. Већ смо рекли да се број $a = |AA'|/2$ назива **велика полуоса**, а број $b = a\sqrt{1-e^2} = |BB'|/2$ **мала полуоса** елипсе.

Такође смо примјети да због симетрије елипса има још једну жижу $F'(-ae, 0)$ са одговарајућом директрисом d': -a/e. Полазећи од жиже F' и директрисе d' могуће је извести исту једначину елипсе.



Докажимо сада оне особине елипсе, које смо користили показујући њену сличност са кружницом (20.).

Став 21.1.2.
Збир растојања ма које тачке елипсе од жижа F и F' је константан и износи $2a$.

Доказ: Ако је $M(x, y)$ произвољна тачка елипсе, N подножје нормале из те тачке на директрису d, а N' подножје нормале на директрису d', онда је $|FM| = e|MN|$ и $|F'M| = e|MN'|$, па је

$$|FM| + |F'M| = e(|MN| + |MN'|).$$

Са друге стране, збир $|MN| + |MN'|$ једнак је растојању између директриса, које износи $2 \cdot \frac{a}{e}$. Зато је $|FM| + |F'M| = e \cdot 2 \cdot \frac{a}{e} = 2a$. ♦

Став 21.1.3.
Ако је збир дужина ма које тачке M криве у равни од двије фиксне тачке F_1 и F_2 те равни константан и једнак броју $2a$, та крива је елипса са великом полуосом a.

Доказ: Поставимо координатни систем тако да x-оса пролази фиксним тачкама са исходиштем тачно на средини између њих. Нека је $M(x, y)$ ма која тачка, а F_1(-c, 0) и F_2(c, 0) дате фиксне тачке, гдје је c за сада непознати параметар. Имамо

$$|F_1M| + |F_2M| = 2a, \text{ тј.}$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a.$$

Пребацимо други сабирак на десну страну и квадрирајмо

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2,$$

а након редуцирања и дјељења са 4 добијамо

(*) $$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx, \text{ тј.}$$

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a - \frac{c}{a}x, \text{ тј. } r_2 = |F_2M| = a - \frac{c}{a}x.$$

Добили смо дужину (другог) потега, радијус вектора од жиже до тачке $M(x, y)$ на елипси. Слично, ако први од корјена горње једнакости пребацимо на другу страну и квадрирамо па средимо, добићемо израз за дужину (првог) потега

$$a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a^2 + cx, \text{ тј. } r_1 = a + \frac{c}{a}x.$$

(Тиме је доказан и наредни став). Даље, квадрирамо претходну (*) једнакост

$$a^2(x^2 - 2cx + c^2 + y^2) = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2, \text{ тј.}$$

$$a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2, \text{ отуда}$$

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2), \text{ те}$$

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2, \text{ или } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

У последњем кораку, дефинисан је број $b^2 = a^2 - c^2$.♦

Став 21.1.4.
Дужине потега, радијус вектора од жиже до тачке $M(x, y)$ на елипси су

$$r = a \pm \frac{c}{a} x .$$

Доказ: Дат је извођењем формуле (*).♦

Задаци 21.1.5.

1. Израчунати дужине полуоса (a и b), линеарни ексцентрицитет ($c = \sqrt{a^2 - b^2}$) и координате фокуса ($F_{12}(\pm c, 0)$) елипсе: **а**) $25x^2 + 169y^2 = 4225$; **б**) $24x^2 + 30y^2 = 720$.

2. Датој елипси одредити ексцентрицитет ($e = \frac{c}{a}$), параметар ($p = \frac{b^2}{a}$) и једначине директриса ($x = \pm \frac{a}{e}$): **а**) $4x^2 + 9y^2 = 36$; **б**) $9x^2 + 5y^2 = 225$.

3. Испитати положај тачака $A(6, -3)$, $B(-2, 5)$, $C(3, -6)$, $D(\sqrt{50}, 0)$, $E(-4, 2\sqrt{6})$ и $G(1, \sqrt{26})$ у односу на елипсу: $\frac{x^2}{48} + \frac{y^2}{36} = 1$.

4. Познате су двије тачке елипсе, написати једначину елипсе: **а**) $M_1(3, \frac{12}{5})$ и $M_2(\frac{5}{3}\sqrt{5}, 2)$; **б**) $M_1(2,3)$ и $M_2(4, -1)$.

5. Наћи дужине и једначине радијус вектора конструисаних из тачке $M(2, y < 0)$ елипсе $5x^2 + 9y^2 = 45$.

6. На елипси $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ наћи тачку чији је производ радијус вектора једнак квадрату мале полуосе.

21.2. Елипса и права

Задата су **елипса** $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ и **права** $y = kx + l$. Тражимо рјешење тог система квадратне и линеарне једначине. Уврстимо ли y из друге једначине у прву, имамо

$$b^2x^2 + a^2(kx + l)^2 = a^2b^2, \text{ затим}$$
$$x^2(a^2k^2 + b^2) + 2kla^2x + a^2(l^2 - b^2) = 0.$$

Одредимо дискриминанту ове квадратне једначине ($Ax^2 + Bx + C$):

$$D = B^2 - 4AC =$$
$$= (2kla^2)^2 - 4(a^2k^2 + b^2)\cdot a^2(l^2 - b^2)$$
$$= 4a^2b^2(k^2a^2 + b^2 - l^2).$$

Сада имамо

$$x_{12} = \frac{-2kla^2 \pm 2ab\sqrt{k^2a^2 + b^2 - l^2}}{2(a^2k^2 + b^2)} .$$

Припадне вриједности y_{12} добијамо увртавајући x_{12} у $y = kx + l$. Јасно је да реалност рјешења зависи о изразу $k^2a^2 + b^2 - l^2$.

i. Ако је $k^2a^2 + b^2 - l^2 > 0$ имамо два рјешења, тачке (x_1, y_1) и (x_2, y_2) у којима права сјече елипсу.
ii. Ако је $k^2a^2 + b^2 - l^2 > 0$ права додирује елипсу у тачки $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$.
iii. Ако је $k^2a^2 + b^2 - l^2 < 0$ права и елипса се мимоилазе, немају реалних заједничких тачака.

Најинтересантни нам је други (ii.) случај, када је права тангента елипсе. **Услов тангирања** је (памтимо: „кабл“):

$$k^2a^2 + b^2 = l^2.$$

Тангенту у тачки $T(x_1, y_1)$ **елипсе** налазимо полазећи од рјешења претходне квадратне једначине, у случају када је дискриминанта једнака нули. Имамо

$$x_{12} = \frac{-2kla^2 \pm 2ab\sqrt{k^2a^2 + b^2 - l^2}}{2(a^2k^2 + b^2)} \text{ и } k^2a^2 + b^2 = l^2.$$

Отуда је $x_{12} = \frac{-kla^2}{k^2a^2+b^2} = -\frac{kla^2}{l^2} = -\frac{a^2k}{l}$, а затим имамо $y_{12} = kx_1 + l = \left(-\frac{a^2k}{l}\right) + l$

$= \frac{-a^2k^2 + l^2}{l} = \frac{-a^2k^2 + (a^2k^2 + b^2)}{l} = \frac{b^2}{l}$.

Дакле, координате **тачке додира** праве $y = kx + l$ и елипсе су $\left(-\frac{a^2k}{l}, \frac{b^2}{l}\right)$.

Одредимо сада коефицијент смјера k и одсјечак на оси y тангенте елипсе. Из $y_1 = \frac{b^2}{l}$ добијамо $l = \frac{b^2}{y_1}$, а из $x_1 = -\frac{a^2k}{l}$ добијамо $k = -\frac{l \cdot x_1}{a^2} = -\frac{x_1}{a^2} \cdot l = -\frac{x_1}{a^2} \cdot \frac{b^2}{y_1} =$

$-\frac{b^2x_1}{a^2y_1}$. Зато је једначина тангенте у задатој тачки елипсе $y = -\frac{x_1b^2}{y_1a^2}x + \frac{b^2}{y_1}$, тј.

$$b^2x_1x + a^2y_1y = a^2b^2, \text{ или } \frac{x_1x}{a^2} + \frac{y_1y}{b^2} = 1.$$

Тангента из тачке $T(x_0, y_0)$ **ван елипсе** $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$. Како дата тачка T пролази траженом правом $y = kx + l$, мора бити $y_0 = kx_0 + l$. Осим тога, коефицијенти k и l морају испуњавати услов да припадају тангенти елипсе $k^2a^2 + b^2 = l^2$. Из тог система треба наћи k и l, а затим написати једначине тангенти.

Полара елипсе. Претпоставимо да су $D_1(x_1, y_1)$ и $D_2(x_2, y_2)$ диралишта тангенти на задатој елипси. Једначине тангенти у D_1 и D_2 су $x_1x/a^2 + y_1y/b^2 = 1$ и $x_2x/a^2 + y_2y/b^2 = 1$. Једначина праве која пролази тачкама додира (једначина праве кроз двије тачке) је $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$.

Како горе написане тангенте кроз тачке D_1 и D_2 пролазе тачком $T(x_0, y_0)$ то њене координате задовољавају једначину обе тангенте, зато је

$$\frac{x_1x_0}{a^2}+\frac{y_1y_0}{b^2}=1 \text{ и } \frac{x_2x_0}{a^2}+\frac{y_2y_0}{b^2}=1.$$

Од друге једначине одузмемо прву, добијамо

$$\frac{x_0}{a^2}(x_2-x_1)+\frac{y_0}{b^2}(y_2-y_1)=0 \Rightarrow \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=-\frac{x_0b^2}{y_0a^2}.$$

Сада, једначина праве кроз тачке D_1 и D_2 гласи $y-y_1=-\frac{x_0b^2}{y_0a^2}(x-x_1)$. Након множења са a^2y_0 добијамо $b^2x_0x + a^2y_0y = a^2y_0y_1 + b^2x_0x_1$, а израз десно од једнакости једнак је a^2b^2. Према томе, имамо

$$b^2x_0x + a^2y_0y = a^2b^2, \text{ или } \frac{x_0\cdot x}{a^2}+\frac{y_0\cdot y}{b^2}=1.$$

Дакле, то је једначина праве која пролази тачкама D_1 и D_2 на елипси, а гдје је $T(x_0, y_0)$ тачка пресјека тангенти у тим тачкама (D_1 и D_2). Тачка $T(x_0, y_0)$ назива се **пол поларе**.

Отуда, проблем повлачења тангенти из тачке $T(x_0, y_0)$ можемо рјешити и налажењем поларе у односу на задату тачку. Затим нађемо пресјеке поларе и елипсе, па напишемо једначине тангенти.

Примјери 21.2.1.

1. Колико елемената има пресјек елипсе и праве:
а) $x^2/16 + y^2/9 = 1$ и $2x – y – 3 = 0$;
б) $x^2/9 + y^2/4 = 1$ и $2x + y – 10 = 0$;
в) $4x^2 + 5y^2 = 24$ и $2x + 5y – 12 = 0$.

Рјешење: **а**) Како је $k^2a^2 + b^2 –l^2 = 2^2\cdot16 + 9 – (-3)^2 = 64 > 0$, правац сјече елипсу; **б**) $k^2a^2 + b^2 –l^2 = (-2)^2\cdot9 + 4 – 10^2 = -60 < 0$, елипса и права немају заједничких тачака; **в**) $k^2a^2 + b^2 –l^2 = (-2/5)^2\cdot6 + 24/5 – (12/5)^2 = 0$, права додирује елипсу. ♦

2. У тачки $D(-1, y > 0)$ елипсе $2x^2 + 3y^2 – 14 = 0$ повучена је тангента. Израчунати површину троугла што га тангента затвара са координатним осама.

Р: Уврстимо $x = -1$ у једначину елипсе, добијамо $2(-1)^2 + 3y^2 – 14 = 0$, па је $y_{12} = 2$. Тачка D има координате (-1, 2). Једначина тангенте у тачки (x_1, y_1) елипсе гласи $x_1x/a^2 + y_1y/b^2 = 1$. Зато, једначина тангенте у тачки $D(-1, 2)$ гласи $-1\cdot x/7 + 2\cdot y/(14/3) = 1$, тј. $\frac{x}{-7}+\frac{y}{7/3}=1$. Тражена површина троугла је $P=\frac{m\cdot n}{2}=\frac{|-7|\cdot\frac{7}{3}}{2}=\frac{49}{6}$ квадратних јединица. ♦

3. Наћи једначине тангенти повучених из тачке $P(7, 2/5)$ на елипсу $4x^2 + 25y^2 = 100$.

Р: Координате тачке P морају задовољавати једначину тангенте, тј. $2/5 = k\cdot7 + l$. Уз то, мора бити задовољен и услов $k^2\cdot25 + 4 = l^2 \cdot$ Те двије једначине чине систем с

непознатим k и l. Из прве једначине је $l = \frac{2}{5} - 7k$, што уврштено у другу даје $25k^2 + 4 = \left(-\frac{2}{5} - 7k\right)^2$, тј. $150k^2 - 35k - 24 = 0$. Рјешења квадратне једначине су $k_1 = \frac{8}{15}$ и $k_2 = -\frac{3}{10}$. Из једначине $l = \frac{2}{5} - 7k$ увртавањем ових k_{12} добијамо одсјечке тангенти $l_1 = -\frac{10}{3}$ и $l_2 = \frac{5}{2}$. Једначине тангенти гласе $y = \frac{8}{15}x - \frac{10}{3}$, $y = -\frac{3}{10}x + \frac{5}{2}$, односно у имплицитном облику $8x - 15y - 50 = 0$, $3x + 10y - 25 = 0$.♦

4. Наћи једначине тангенти елипсе $x^2/20 + y^2/5 = 1$ које су паралелне с правом $2x - 2y - 7 = 0$.

Р: Коефицијент смјера дате праве и тангенте је $k = 1$. Користећи услов додира $k^2a^2 + b^2 = l^2$ имамо $l^2 \cdot 20 + 5 = l^2$, тј. $l_{12} = \pm 5$. Тангенте су $y = x \pm 5$.
Други начин: Ако поред тангенти желимо наћи и диралишта, полазимо од коефицијента смјера тангенте у тачки елипсе $k = -\frac{x_1 b^2}{y_1 a^2}$ а и $k = 1$. Отуда $x_1 = -4y_1$. Затим, тачка (x_1, y_1) лежи на елипси, па је $x_1^2/20 + y_1^2/5 = 1$. Рјешења система су двије тачке додира $D(-4, 1)$ и $D(4, -1)$. На крају, само напишемо једначине тангенти $\frac{-4 \cdot x}{20} + \frac{1 \cdot y}{5} = 1$ и $\frac{4 \cdot x}{20} + \frac{-1 \cdot y}{5} = 1$, тј. $y = x + 5$ и $y = x - 5$.♦

5. Одредити једначине тангенти елипсе $3x^2 + 9y^2 = 16$, које су окомите на праву $x - y + 5 = 0$.

Р: Коефицијент смјера праве $y = x + 5$ је $k_p = 1$, па је коефицијент смјера тангенти $k_t = -1$. Из једначине елипсе $\frac{x^2}{16/3} + \frac{y^2}{16/9} = 1$ према услову додира имамо $(-1)^2 \frac{16}{3} + \frac{16}{9} = l^2$, тј. $l_{12} = \pm\frac{8}{3}$. Отуда једначине тангенти $3x + 3y \pm 8 = 0$.♦

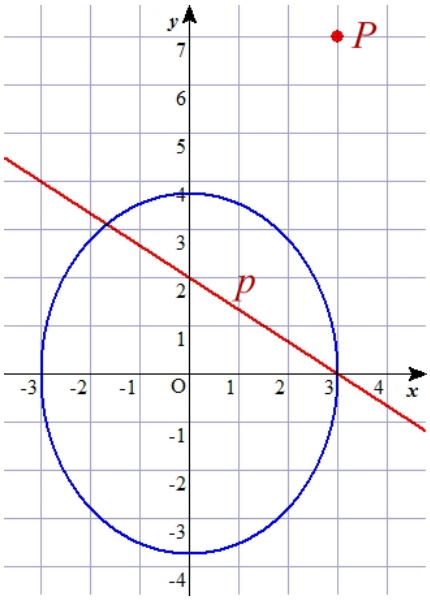
6. Одредити једначину елипсе која додирује праву $4x + 5y - 25 = 0$ у тачки апсцисе 4.

Р: Уврстимо $x = 4$ у једначину дате праве, добијамо $y = 9/5$. Коефицијент тангенте је 4/5, она пролази тачком $D(4, 9/5)$ па налазимо $l = 5$, што уврштено у услов додира даје $(16/25)a^2 + b^2 = 25$. Координате тачке D задовољавају и једначину елипсе, тј. $\frac{16}{a^2} + \frac{81/25}{b^2} = 1$. Рјешавањем система, лако налазимо $a^2 = 25$ и $b^2 = 9$, па је тражена елипса $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.♦

7. Како гласи једначина елипсе којој су праве $9x + 20y - 75 = 0$ и $4x - 5y + 25 = 0$ тангенте?

Р: Дате тангенте у експлицитном облику су $y = -\frac{9}{20}x + \frac{75}{20}$ и $y = \frac{4}{5}x + 5$. Према услову додира, након сређивања, имамо систем $81a^2 + 400b^2 = 225 \cdot 25$, $16a^2 + 25b^2 = 625$, чија су рјешења $a^2 = 25$, $b^2 = 9$. ♦

8. Одредити једначину поларе тачке $P(3, 7)$ елипсе $14x^2 + 9y^2 = 126$.



Р: Уврстимо координате пола (P) у једначину поларе, имамо $14 \cdot 3x + 9 \cdot 7y = 126$. Након дјељења са 21 имамо једначину поларе (p) $2x + 3y = 6$.

На слици лијево је очигледно да је права $y = 3$ једна тангента на елипсу, која садржи пол и пресјек поларе са елипсом ♦

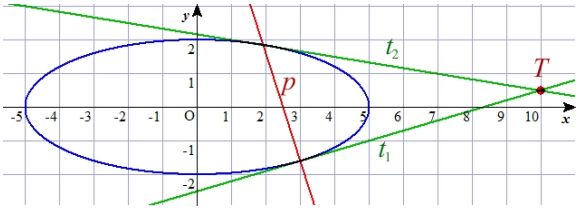
9. Права $2x + 4y + 5 = 0$ је полара елипсе $x^2/9 + y^2//4 = 1$. Које су координате пола?

Р: Једначина поларе дате елипсе је $4x_0x + 9y_0y = 36$. Како то мора бити права једнака датој, изједначавањем налазимо да постоји број λ такав да је $4x_0 = 2\lambda$, $9y_0 = 4\lambda$, $-36 = 5\lambda$. Отуда, пол је $P(-18/5, -16/5)$. ♦

10. Помоћу поларе одредити једначине тангенти повучених из тачке $T(10, ½)$ на елипсу $4x^2 + 25y^2 = 100$.

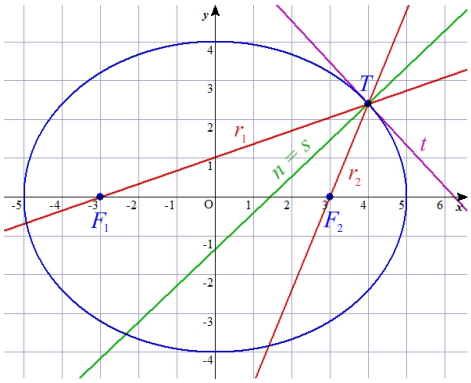
Р: Једначина поларе је $4 \cdot 10x + 25 \cdot \frac{1}{2}y = 100$ или $16x + 5y = 40$.

Пресјек ове поларе и дате елипсе води до једначине $13x^2 - 64x + 75 = 0$ чија су рјешења $x_1 = 3$, $x_2 = 25/13$, а затим добијамо $y_1 = -8/5$, $y_2 = 24/13$. Из тачке T кроз два диралишта пролазе, тражене тангенте (в. слику десно). ♦



11. Кроз тачку $T(4, 12/5)$ елипсе $16x^2 + 25y^2 = 400$ повучена је тангента и нормала. Одредити једначине радијус-вектора које припадају тој тачки и доказати да је симетрала унутрашњег угла радијус вектора идентична са нормалом.

Р: Тачка T припада елипси (в. слику доле). Једначина тангенте (t) у тачки T је



$16\cdot 4\cdot x+25\cdot\frac{12}{5}\cdot y=400$, тј. 16x + 15y = 100.

Коефицијент смјера тангенте је $k_t=-\frac{16}{15}$, па је коефицијент смјера нормале $k_n=\frac{15}{16}$ и једначина нормале (n) је $75x - 80y - 108 = 0$.

Фокуси су $F_{12}(\pm 3, 0)$, а једначине радијус-вектора (r_{12}) су $y-0=\frac{\frac{12}{5}-0}{4-(\pm 3)}(x\pm 3)$. Након сређивања имамо $12x - 35y + 36 = 0$ и $12x - 5y - 36 = 0$, односно (у Хесеовом облику):

$$\frac{12x-35+36}{-\sqrt{12^2+(-35)^2}}=0 \text{ и } \frac{12x-5y-36}{+\sqrt{12^2+(-5)^2}}=0.$$

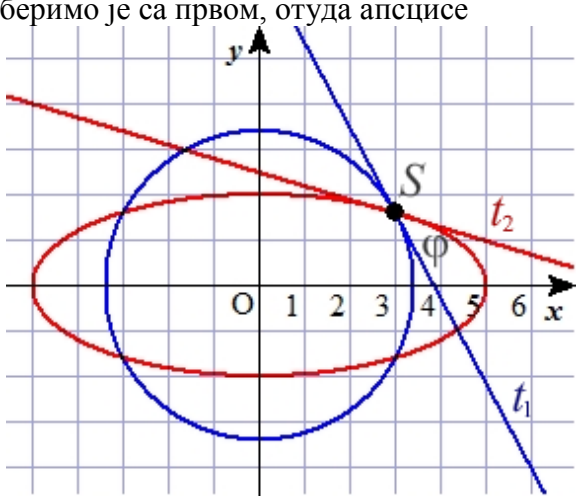
Једначина симетрале (s) унутрашњег угла ових правих је

$$\frac{12x-35y+36}{-37}-\frac{12x-5y-36}{13}=0, \text{ тј. } 75x - 80y - 108 = 0,$$

а то је и једначина нормале. ♦

12. Наћи тачке и угао пресјека кривих $25x^2 + 25y^2 = 289$ и $4x^2 + 25y^2 = 100$.

Р: Помножимо другу једначину са -1 и саберимо је са првом, отуда апсцисе пресјека $x_{12} = \pm 3$, а затим увртавањем у било коју од датих једначина одговарајуће $y_{12} = \pm 8/5$. Имамо четири сјецишта.



Нађимо једначине тангенти у сјецишту $S(3, 8/5)$. Тангенте на прву, односно другу дату криву су $3\cdot x+\frac{8}{5}\cdot y=\frac{289}{25}$ и $4\cdot 3\cdot x+25\cdot\frac{8}{5}\cdot y=100$. Отуда коефицијенти смјера $k_1=-\frac{15}{8}$ и $k_2=-\frac{3}{10}$, па је $\operatorname{tg}\varphi=\frac{-\frac{3}{10}+\frac{15}{8}}{1+\left(-\frac{3}{10}\right)\cdot\left(-\frac{15}{8}\right)}=\frac{126}{125}$, те φ = 43°13′42″. ♦

13. Написати једначине заједничких тангенти кривих $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{12}=1$ и $\frac{x^2}{112}+\frac{y^2}{9}=1$.

Р: Према услову додира је $64k^2 + 12 = l^2$, $112k^2 + 9 = l^2$. Помножимо ли прву једначину са -1 и саберемо је са другом, добијамо $48k^2 – 3 = 0$. Отуда $k_{12}=\pm\frac{1}{4}$, затим $l_{12}=\pm 4$. Тражене тангенте су $y=\pm\frac{1}{4}x\pm 4$.♦

Задаци 21.2.2.

1. Наћи пресјеке праве и елипсе:
а) $3x + 2y = 10$, $x^2 + 4y^2 = 20$; **б)** $10x – 9y – 75 = 0$, $x^2/36 + y^2/25 = 1$.

[(4, -1), (2, 2); (24/5, -3)]

2. Одредити једначине тангенте и нормале елипсе $5x^2 + 20y^2 = 100$ у тачки елипсе $(2, y > 0)$.

[$t : x + 4y = 10$, $n : 4x – y = 6$]

3. У тачкама елипсе $8x^2 + 9y^2 = 72$ са апсцисама фокуса повучене су тангенте. Показати да те тангенте формирају ромб и наћи његову површину.

[тјемена: (-1, 8/3), (-1, -8/3), (1, -8/3), (1, 8/3), P: 54 кв. јед.]

4. Наћи параметар ламбда тако да права $\lambda x + 5y – 12 = 0$ буде тангента елипсе $4x^2 + 5y^2 = 24$.

[±2]

5. Наћи једначине тангенти из тачке $T(10, 4)$ на елипсу $16x^2 + 25y^2 = 400$.

[$D_1(0, 4)$, $D_2(4, -12/5)$; t_1: $y – 4 = 0$, t_2: $16x – 15y = 100$]

6. Одредити тангенте елипсе $9x^2 + 25y^2 = 225$ које су:
а) паралелне; б) окомите на праву $4x + 5y = 0$.

7. Одредити једначину елипсе која додирује праве $2x + 3y – 25 = 0$, $3x – 8y – 50 = 0$.

8. Како гласи једначина елипсе којој је права $2x + 3y = 9$ тангента, а фокуси су јој у тачкама $\Phi_{12}(\pm 2, 0)$. Наћи и координате диралишта.

9. На елипсу $4x^2 + 9y^2 = 36$ повући тангенту која на позитивном дјелу координатних оса одсјеца једнаке одсјечке. Наћи једначину елипсе и координате диралишта.

10. На елипсу $9x^2 + 16y^2 = 144$ треба повући тангенте које с позитивним смјером x-осе затварају угао 45°. Које су једначине тангенти и које су једначине диралишта?

11. Како гласи једначина елипсе која пролази тачком $T(4, -1)$ и додирује праву $x + 4y = 10$?

12. Наћи полару тачке $P(2, -1)$ у односу на елипсу $x^2/9 + y^2/16 = 1$.

13. Задата је елипса $x^2/36 + y^2/16 = 1$ и права $3y - 2x - 12 = 0$. Наћи пол.

14. Наћи угао пресјека кривих $9x^2 + 64y^2 = 144$ и $4x^2 + 9y^2 = 36$.

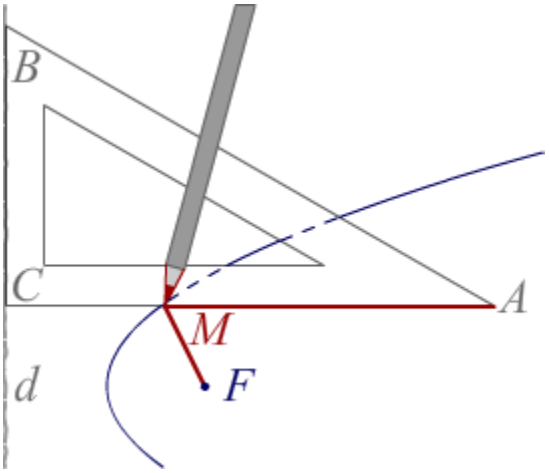
15. Наћи заједничке тангенте кривих $41x^2 + 41y^2 = 625$ и $9x^2 + 25y^2 = 225$.

22. Парабола

Дефиниција 22.0.1.
Парабола (грч. *παραβολή*, једнако) је скуп свих тачака M у равни које су једнако удаљене од једне фиксне тачке F те равни, коју називамо **фокус** или **жижа** параболе, и ван ње једне сталне праве d исте равни, коју називамо **директриса** .♦

Један начин цртања параболе према овој дефиницији је тзв. механички.

Узмемо троугаони лењир ABC, са правим углом у тјемену C, као на слици десно, и конац дужине AC. Један крај конца учврстимо у тјемену A, а други у фокусу F. Ако страница BC клизи по директриси d, а конац се затеже оловком чији је врх стално уз страницу AC, онда тачка M у којој се налази врх оловке описује лук параболе са директрисом d и фокусом F.

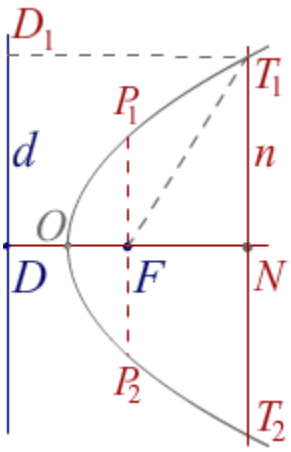


Лако се види да је увијек $|MF| = |MA|$.

22.1. Елементи параболе

Конструкција 21.1.1.
Задати су права, директриса d и ван ње фокус (жижа) F у истој равни. Требамо конструисати параболу са датим елементима.

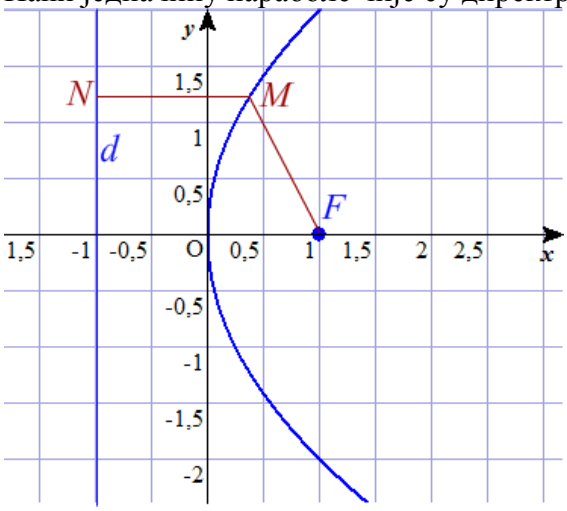
Прво нацртамо **осу параболе**, тј. праву кроз тачку F окомиту на d у тачки D, као на слици десно. **Врх осе** параболе, тачка O, налази се на половини удаљености од F до d. На оси бирамо произвољну тачку N тако да је D-O-N, кроз коју вучемо паралелу n с директрисом d. Ту паралелу пресјечемо кружницом $k(F, |ND|)$ чији центар је фокус, а полупречник удаљеност двију паралела. Добијамо двије тачке пресјека T_1 и T_2 које леже на параболи. Са слике лако видимо да је $|FT_1| = |T_1D_1|$, гдје је D_1 подножје нормале из прве пресјечне тачке на директрису.



Посебно, када паралела n садржи фокус, добијене тачке пресјека кружнице $k(F, |FD|)$ и n, рецимо P_1 и P_2 дефинишу **параметар параболе**. Параметар параболе је дужина тетиве $|P_1P_2|$.♦

Полазећи од дефиниције (21.0.1.) извешћемо и једначину параболе.

Примјер 22.1.2.
Наћи једначину параболе чије су директриса $d : x = -1$ и фокус $F(1,0)$.



На слици лијево, мора бити $|FM| = |MN|$, гдје су $M(x, y)$ произвољна тачка на параболи и $N(-1, y)$ окомита пројекција те тачке на директрису. Како је $|FM| = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$ и $|MN| = |1+x|$ то из $\sqrt{(x-1)^2 + y^2} = x+1$ квадрирањем слиједи $(x^2 - 2x + 1) + y^2 = 1 + 2x + x^2$, тј.

$$y^2 = 4x.\blacklozenge$$

Уопште, ако је директриса $d : x = -p/2$, а фокус $F(p/2, 0)$, онда разматрањем сличним као у претходном примјеру налазимо $|FM| = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}$, $|MN| = \left|\frac{p}{2} + x\right|$ и $|FM| = |MN|$. Поново, квадрирањем и сређивањем последње једнакости добијамо $y^2 = 2px$. Обрнуто, нека тачка $M(x, y)$ припада параболи $y^2 = 2px$. Тада је $|FM| = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + 2px} = \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2} = \left|x + \frac{p}{2}\right| = |MN|$, што значи да су растојања од тачке M од тачке F и праве d једнака. Тиме смо доказали следећи резултат.

Став 22.1.3.

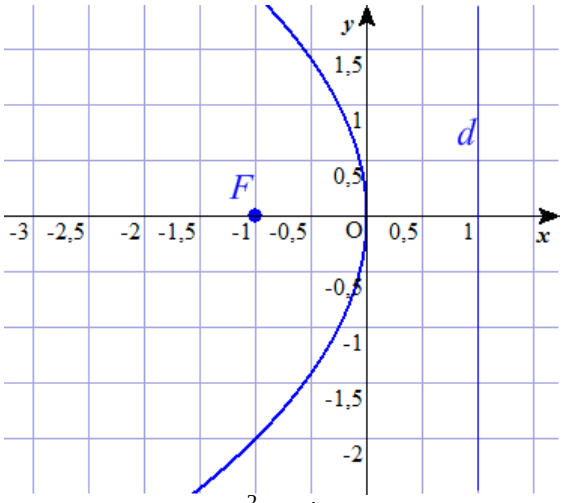
Тачка $M(x, y)$ припада параболи чија је директриса $d : x = -\frac{p}{2}$ и фокус $F(\frac{p}{2}, 0)$, ако и само ако њене координате задовољавају једначину $y^2 = 2px$. ♦

Из наведеног става произилазе следеће **особине** параболе $y^2 = 2px$:

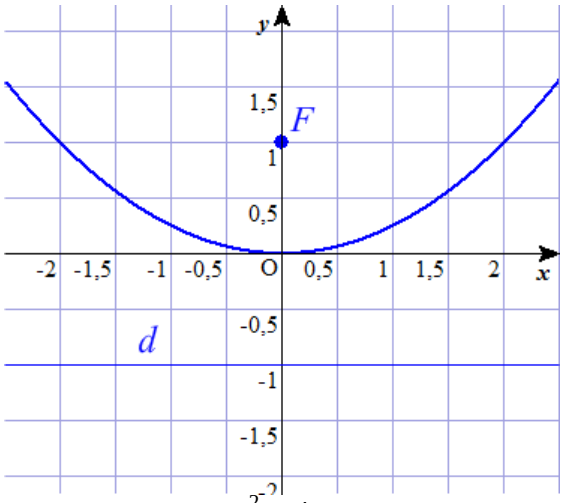
1. све апсцисе параболе су ненегативне;
2. парабола садржи координатни почетак $O(0, 0)$;
3. парабола је симетрична у односу на апсцису;
4. при неограниченом порасту апсцисе (апсолутне) ординате расту неограничено.

Због особине три, апсциса је **оса симетрије** ове параболе. Растојање између директрисе и фокуса (p) назива се **параметар параболе**, који смо помињали у конструкцији (21.1.1.).

Трансформацијом координатног система мјењају се положаји директрисе и жиже, те се мјења и једначина параболе. Ротацијом за 180°, или огледањем око y-осе, добија се парабола $y^2 = -2px$. Ротацијом за 90° добијамо параболу $x^2 = 2py$. На следеће двије слике су дати примјери таквих парабола.



$y^2 = -4x$



$x^2 = 4y$

Посебан случај ових парабола су квадратне функције, које смо проучавали у II разреду.

Примјер 22.1.4.
Показати да је квадратна функција $y = x^2 + 2x + 3$ парабола.

Рјешење: Дати основни облик функције преводимо у канонски облик: $y^2 = (x^2 + 2x + 1) + 2 = (x + 1)^2 + 2$, из којег се види да се она може добити из функције $y = x^2$ једном транслацијом x-осе за један у лијево (резултат је $y = (x + 1)^2$), а затим транслацијом y-осе за два горе. Дакле, полазећи од параболе $y^2 = x$, ротацијом за 90°, затим након двије наведене транслације добијамо дату квадратну функцију. Према томе, дата квадратна функција је парабола. ♦

Задаци 22.1.5.

1. Наћи координате жиже, једначину директрисе и графички приказати параболу:
i. $y^2 = 5x$; ii. $y^2 = -6x$; iii. $x^2 = 10y$; iv. $x^2 = -y$.

2. Полазећи од дефиниције (21.0.1.) наћи једначину параболе, ако су дати једначина директрисе (d) и фокус, тј. жижа (F):
i. $d : x = -2$, $F(1,0)$; ii. $d : x = 1$, $F(-2,0)$; iii. $d : y = -0{,}5$ и $F(0,1)$; iv. $d : y = 2$, $F(0,0)$.

3. Дату квадратну функцију свести на канонски облик и показати којим трансформацијама је добијена из параболе $y^2 = 2px$.
i. $y^2 = x^2 - 2x - 3$; ii. $y^2 = 2x^2 + 3x - 5$;
iii. $y^2 = -x^2 + 4x + 1$; iv. $y^2 = -3x^2 - 6x + 5$.

4. Одредити једначину параболе чија оса је паралелна с y-осом и која пролази тачкама (1, -1), (-2, 4), (16, 4).

[$y = 1/9\ x^2 - 14/9\ x + 4/9$]

5. Одредити једначину параболе чија оса је паралелна с x-осом и која пролази тачкама (2, 4), (-3, 1), (-6, -2).

[$(y + 5)^2 = 9(x + 7)$]

6. Колики је угао између радијус вектора пааараболе $y = \frac{1}{8}x^2$, који припадају тачкама (-4, 2), (6, 9/2).

[157° 22′ 48″]

7. Дате су параболе $y^2 = 24x$ и $x^2 = 3y$ и тачка $A(24, 3)$. Ако су B и O пресјечне тачке ових парабола, доказати да је угао ABO прав.

8. Праве $2x + y - 12 = 0$ и $3x - y - 3 = 0$ се сјеку у тачки A параболе $y^2 = 2px$. Наћи површину троугла ABC, гдје су тачке B и C друге тачке пресјека датих правих и параболе.

22.2. Парабола и права

Координате заједничких тачака параболе $y^2 = 2px$ и праве линије $y = kx + l$, можемо наћи рјешавањем система. Увртавањем друге у прву једначину, добијамо $(kx+l)^2 = 2px$, тј. $k^2x^2 + 2(kl - p)x + l^2 = 0$. Рјешења квадратне једначине су $x_{12} = \frac{-2(kl-p) \pm \sqrt{4(kl-p)^2 - 4k^2l^2}}{2k^2} = \frac{-(kl-p) \pm \sqrt{p(p-2kl)}}{k^2}$, а одговарајуће друге координате пресјека су $y_{12} = k \cdot x_{12} + l$. Отуда закључци:

i. ако је $p - 2kl > 0$ права и парабола се сјеку у двије тачке (x_j, y_j), $j = 1, 2$;
ii. ако је $p - 2kl = 0$ права и парабола се додирију у тачки $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$;
iii. ако је $p - 2kl < 0$ права и парабола немају реалних заједнчких тачака.

Тангента 22.2.1.
Видјели смо да је права $y = kx + l$ тангента параболе $y^2 = 2px$ када је $2kl = p$ (памтимо: „двије клупе“). Координате додирне тачке су $x_1 = \frac{-2(kl-p)}{2k^2} = \frac{p-kl}{k^2} = \frac{2kl-kl}{k^2} = \frac{kl}{k^2} = \frac{l}{k}$ и $y_1 = k\cdot\frac{l}{k}+l = 2l$. Дакле, додирна тачка је $P(l/k, 2l)$.

Обратно, ако су познате координате додирне тачке $P(x_1, y_1)$ тангенте и параболе $y^2 = 2px$, тада је $y_1 = 2l$, па је $l = \frac{y_1}{2} = \frac{y_1}{2}\cdot\frac{y_1}{y_1} = \frac{y_1^2}{2y_1} = \frac{2px_1}{2y_1} = \frac{px_1}{y_1}$, а из $x_1 = \frac{l}{k}$ слиједи $k = \frac{l}{x_1} = \frac{\frac{px_1}{y_1}}{x_1} = \frac{p}{y_1}$ што значи да у тачки $P(x_1, y_1)$ дата парабола има **тангенту** $y = \frac{p}{y_1}\cdot x + \frac{p\cdot x_1}{y_1}$, тј.

$$yy_1 = p(x + x_1).\blacklozenge$$

Нормала 22.2.2.
Дати су парабола $y^2 = 2px$ и њена тангента $yy_1 = p(x + x_1)$ у тачки $P(x_1, y_1)$. Наћи једначину праве окомите на тангенту, тзв нормалу у истој тачки.

Из претходног примјера (21.2.1.) слиједи да је коефицијент тангенте дате параболе $k_t = \frac{p}{y_1}$, па је коефицијент нормале $k_n = -\frac{y_1}{p}$, а отуда, истом тачком $P(x_1, y_1)$ пролази и нормала на тангенту параболе, тј. **нормала** на параболу:

$$y - y_1 = -\frac{y_1}{p}(x - x_1).\blacklozenge$$

Примјер 22.2.3.
Дати су парабола $y^2 = 2px$ и ван ње у истој равни тачка $T(x_0, y_0)$. Наћи тангенте на параболу које садрже дату тачку.

Упутство: 1. Начин. Радимо као у претходним случајевима. Једначина тангенте има облик $y = kx + l$, али она пролази тачком $T(x_0, y_0)$, па је $y_0 = kx_0 + l$, при чему је $2kl = p$. Имамо систем са двије непознате k и l, чија рјешења су тражене тангенте.

2. Начин. Тангента $yy_1 = p(x + x_1)$ пролази тачком $T(x_0, y_0)$, па је $y_0y_1 = p(x_0 + x_1)$. Тачка додира $P(x_1, y_1)$ лежи на параболи, па је $y_1^2 = 2px_1$. Дакле, имамо систем с непознатима x_1 и y_1. Када нађемо додирну тачку (x_1, y_1) лако налазимо једначине тангенти.♦

Полара 22.2.4.

Полара тачке $T(x_0, y_0)$ у односу на параболу $y^2 = 2px$ је права је права која спаја тачке додира P_1 и P_2 двије тангенте повучене из T на параболу.

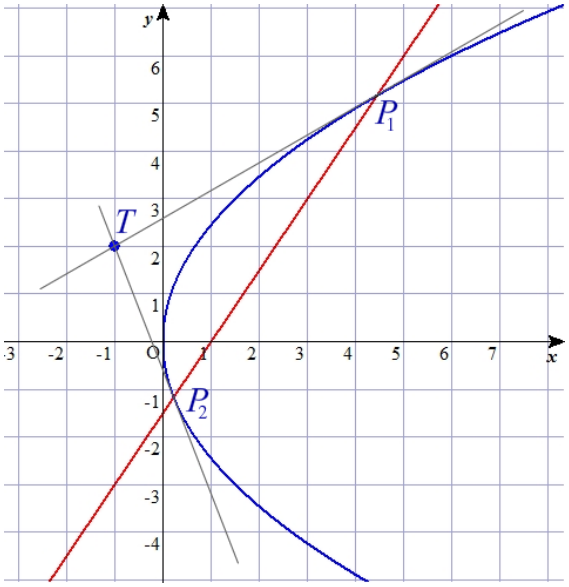
Ако су $P_1(x_1, y_1)$ и $P_2(x_2, y_2)$ тачке додира, мора бити

$$(*)\ y_0y_1 = p(x_0 + x_1),\ \ y_0y_2 = p(x_0 + x_2).$$

Одузимањем прве од друге једначине, добијамо

$$y_0(y_2 - y_1) = p(x_0 + x_2) - p(x_0 + x_1), \text{ те } \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{p}{y_0}.$$

Отуда, једначина праве која иде додирима P_1 и P_2 гласи $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$, а



ако уважимо претходну једнакост, имамо

$$y - y_1 = \frac{p}{y_0}(x - x_1).$$

Помножимо ли ову једнакост са y_0 добијамо

$$yy_0 - y_1y_0 = px - px_1, \text{ тј.}$$
$$yy_0 = y_1y_0 + p(x - x_1),$$

односно због (*), имамо

$$yy_0 = p(x_0 + x_1) + p(x - x_1) = p(x_0 + x).$$

Према томе, једначина праве која пролази диралиштима, тј. **једначина поларе** тачке $T(x_0, y_0)$ у односу на параболу $y^2 = 2px$ гласи

$$yy_0 = p(x + x_0). \blacklozenge$$

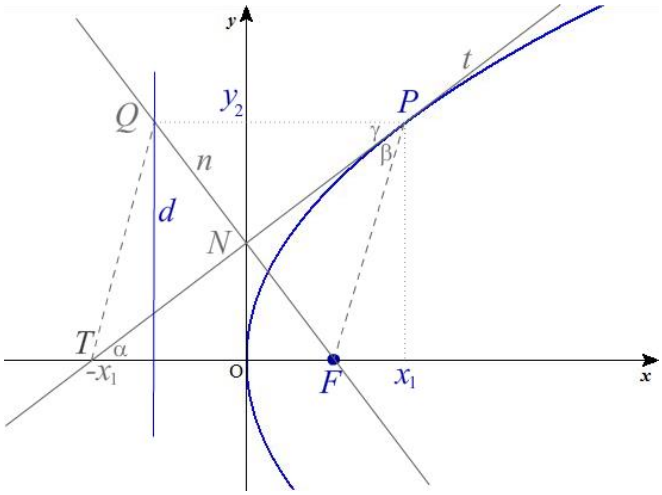
На слици горе је полара P_1P_2 параболе $y^2 = 6x$ у односу на тачку $T(-1, 2)$. Једначина те поларе (црвена линија) је $2y = 3(x - 1)$.

Конструкција 22.2.5.
Конструкција тангенте t у тачки $P(x_1, y_1)$ параболе. Нека је PT тражена тангента, гдје је T тачка пресјека тангенте и апсцисе. Фокус параболе је тачка $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, директриса је права d.

Анализа. Из једначине тангенте $yy_1 = p(x + x_1)$, ако ставимо $y = 0$ добијамо $x = -x_1$. Према томе, имамо координате тачке $T(-x_1, 0)$. Зато је растојање од тачке T до фокуса F параболе $|TF| = x_1 + p/2$, гдје је p параметар дате параболе. Како је

$$|FP| = \sqrt{\left(x_1 - \frac{p}{2}\right)^2 + y_1^2} = \sqrt{\left(x_1 + \frac{p}{2}\right)^2} = x_1 + \frac{p}{2},$$

видимо да је $|TF| = |FP| = x_1 + \frac{p}{2}$.



Дакле, троугао TFP је једнакокрак, па је $\angle PTF = \angle TPF$. Повуцимо из тачке P нормалу на директрису d и пресјек изначимо са Q. Четвороугао $TFPQ$ је очигледно ромб, и угао $\alpha = \gamma$ а како смо прије показали да је $\alpha = \beta$, то је $\beta = \gamma$ ($\angle FTP = \alpha$, $\angle FPT = \beta$, $\angle TPQ = \gamma$).

Дакле, тангента параболе чини с радијус вектором диралишта (P) и паралелом са апсцисом кроз диралиште једнаке углове. Из тог својства тангенте параболе произлази и следећи став (21.2.6.).

Како је четвороугао $TFPQ$ ромб, то је $FQ \perp PT$ (дијагонале ромба су окомите). Ако се FQ и PT сјеку у N, то је |NF| = |NQ| (дијагонале ромба се полове). Према томе, тачка Q која је симетрична слика фокуса у односу на тангенту (t) параболе, јесте на директриси (d). Та се тачка назива и **супротиште** фокуса обзиром на дату тангенту. Дакле, сва супротишта су на директриси.

Конструкција.
1. Начин. Повући ћемо радијус вектор ***FP*** и кроз тачку P паралелу са апсцисисом (x-осом). Тангента полови угао што га чине та два правца.

2. Начин. Нанијети ћемо на негативну страну x-осе дату апсцису x_1 и добивену тачку T спојити са датом тачком P.♦

Став 22.2.6.
Зраке које ударају паралелно са осом параболичног огледала рефлектују у фокус и обратно, зраке које излазе из фокуса параболичног огледала рефлектују се паралелно.♦

Примјер 22.2.7.
Како ћемо конструисати тангенте из тачке M изван параболе?

Из дате тачке M опишемо кружницу, која пролази фокусом. Та кружница сјече директрису у двијема тачкама, супротиштима. Паралеле с осом параболе повучене у тим тачкама сјеку параболу у диралиштима тражених тангената.♦
Примјери 22.2.8.
1. У пресјеку праве $2x - 3y + 4 = 0$ и параболе $y^2 = 4x$ повући нормале на параболу и показати да пресјек тих нормала лежи на параболи.

Упутство: Прво рјешити систем датих једначина, наћи сјецишта $C_1(4,4)$ и $C_2(1,2)$. Наћи једначине нормала на параболу, коначно $2x + y - 12 = 0$, $x + y - 3 = 0$; а координате њихових пресјека уврстити у једначину параболе. ♦

2. У тачки $T(7, 7/2)$ параболе $y^2 = (7/4)x$ повучена је тангенте и окомица (нормала) на њу. Израчунати површину троугла којег те двије праве затварају са x-осом.

Упутство: Уврстити координате тачке T у једначину тангенте (22.2.1.). Помоћу коефицијента смјера тангенте наћи коефицијент смјера нормале (-4) и формирати једначину нормале $8x + 2y - 63 = 0$. Наћи пресјеке тангенте и нормале са x-осом, они дефинишу основицу троугла, а висина тачка T. Површина је 833/32. ♦

3. Одредити једначине тангенти повучених из тачке $T(-2, -3/2)$ на параболу $y^2 = 9x$.

Упутство: Уврстити T у једначину поларе, добија се $y = -3x + 6$. Наћи пресјеке поларе и параболе. Тангенте су праве кроз T и те пресјеке $3x + 4y + 12 = 0$ и $3x - 2y + 3 = 0$. ♦

4. Под којим се углом види парабола $(y - 4)^2 = 20(x - 1)$ из тачке $T(1,9)$.

Упутство: 1. Транслацијом за 1 лијево и 4 горе, то су парабола $y'^2 = 20x'$ и тачка $T'(0, 13)$. Затим радимо као у прошлом задатку. Тражени угао је 135°.

Директно: 2. Једначину тангенте параболе $(y - n)^2 = 2p(x - m)$ у тачки $T(x_1, y_1)$ добијамо транслацијом за m десно и n доле. Срећивањем слиједи

$$(y - n)(y_1 - n) = p(x + x_1 - 2m)$$

а то је и једначина поларе, ако тачка T не припада параболи. Из тачке $T(1, 9)$ постављамо тангенте редосљедом као у претходном примјеру. ♦

5. На параболу $y^2 = 4x$ повући тангенту која је паралелна с правом $2x - 3y + 9 = 0$. Одредити површину троугла кога одређује диралиште, жижа и пресјек нормале с x-осом.

Упутство: Коефицијент смјера дате праве и тангенте исти, што даје $y_1 = 3$. Из једначине параболе добијамо и x_1. Затим, помоћу коефицијента и тачке додира налазимо једначину нормале $12x + 8y - 51 = 0$, а пресјеци тангенте и нормале редом са апсцисом дефинишу два тјемена троугла, а треће параметар и жижа. Површина је 39/8 кв. јединица. ♦

6. Наћи ону нормалу параболе $y^2 = 2x$ која пролази тачком (1,4).

Упутство: $(1,4) \in n \Rightarrow 4 - y_1 = y_1/1 \cdot (1 - x_1)$, тј. $x_1y_1 = 4$. $(x_1, y_1) \in P \Rightarrow y_1^2 = 2x_1$. Из система слиједи рјешење (2,2), диралиште. Нормала је $2x + y - 6 = 0$. ♦

7. Парабола $3y^2 = 10x$ има полару $5x - 12y + 55 = 0$. Наћи координате пола.

Упутство: Из једначине поларе (22.2.4.) уврштавањем и упоређивањем налазимо пол, тачку $T(11,4)$.♦

8. Под којим углом се сијеку криве $(x-4)^2 + y^2 = 256$ и $y^2 = 16x$?

Упутство: Пресјеци су $C_{12}(12, \pm 8\sqrt{3})$. Тангента на кружницу у првом сјецишту је $(x-4)(12-4) + y\cdot 8\sqrt{3} = 256$, а на параболу $y\cdot 8\sqrt{3} = 8(x+12)$. Налазимо коефицијенте ових правих $k_{12} = \pm\sqrt{3}/3$, а отуда $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2} = \sqrt{3}$, тј. $\varphi = 60°$.♦

9. Наћи заједничке тангенте параболе $y^2 = 12x$ и кружнице полупречника 5 којој је центар жижа параболе.

Упутство: Координате фокуса су $F(3,0)$, па је кружница $(x-3)^2 + y^2 = 25$. Услови додира $r^2(k^2+1) = (q - kp - l)^2$ и $2kl = p$ дају $k_{12} = \pm\dfrac{3}{4}$ и $l_{12} = \pm 4$, па су тангенте $y = \pm\dfrac{3}{4}x \pm 4$.♦

Задаци 22.2.9.

1. У крајњим тачкама тетиве $4x - 3y - 24 = 0$ параболе $3y^2 = 16x$ повући тангенте. Показати да је правац који спаја пресјек тих тангенти са средином задане тетиве, паралелан оси x.

Резултат: Пресјеци тетиве и параболе су $C_1(12,8)$ и $C_2(3,-4)$, а пресјек тангента $C(-6, 2)$. Права кроз тачку C и средину тетиве $T(15/2, 2)$ је $y - 2 = 0$.♦

2. Одредити једначину тангенте на параболу $x^2 = 5y$ у тачки $(10, 20)$.

[$xx_1 = p(y + y_1)$, тј. $4x - y - 20 = 0$]

3. Одредити једначине тангенти параболе $y = x^2/12$ у тачкама са апсцисама $\pm 2, \pm 4$.

[$2x - 6y - 2 = 0$, $2x + 6y + 2 = 0$, $4x - 6y - 8 = 0$, $4x + 6y + 8 = 0$]

4. Написати једначину тангенте параболе, ако је:
а) $(y-2)^2 + x = 0$ у њеној тачки $M(-4, 0)$; **б**) $y^2 - 4x - 4y = 0$, $M(3, -2)$.

[а) $x - 4y + 4 = 0$; б) $x + 2y + 1 = 0$]

5. Одредити једаначине тангенти повучених из тачке T на параболу:
а) $T(6, 8)$, $y^2 = 8x$; **б**) $T(3/2, -21/4)$, $y^2 = 15x$.

6. Из тачке $P(5, -1)$ повући тангенте на параболу $(y-2)^2 = 9(2 - x)$.

7. Из тачке $P(3, -3)$ повући тангенте на параболу $(x-1)^2 = 8(y-1)$.

8. Одредити једначине нормала кроз тачке $M_1(1,2)$ и $M_2(4,4)$ параболе $y^2 = 4x$, затим угао између њих.

9. Одредити полару тачке M обзиром на параболу $y^2 = 2px$:
а) $M(6, 8)$, $y^2 = 8x$; **б**) $M(-2, -3)$, $y^2 = 12x$.

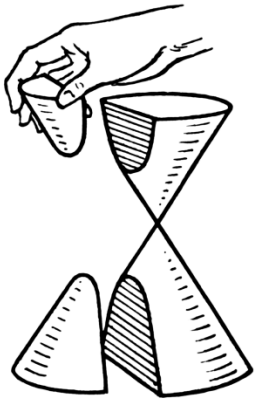
10. Наћи једначину тангенте параболе $y^2 = 4x$ која с правцем $y = 3x + 3$ затвара угао 45°.

11. Под којим углом се сјеку криве:
а) $x^2 + y^2 = 5$, $y^2 = 4x$; **б**) $x^2 + y^2 - 4x - 6 = 0$, $y^2 = 3x$?

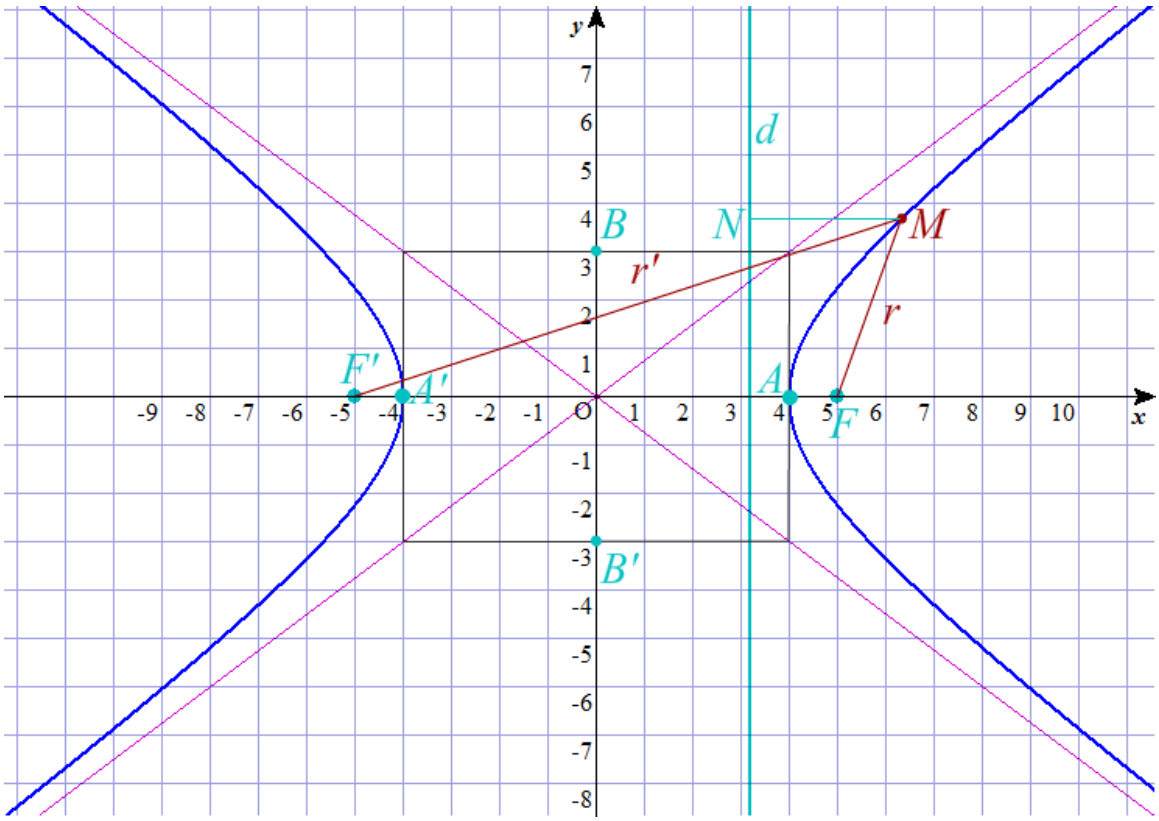
12. Одредити једначине заједничких тангенти на криве $y^2 = 4x$ и $10x^2 + 10y^2 = 81$.

23. Хипербола

Хипербола је такође конусни пресјек. За разлику од елипсе, хипербола је **отворена крива**, али за разлику од параболе, она се састоји од два симетрична одвојене дјела који се називају **гране** (или руке) хиперболе.



Центар хиперболе је њен центар симетрије. На следећој слици доле, центар је исходиште координатног система, тачка O. **Оса** хиперболе је њена оса симетрије. Свака хипербола има двије такве осе (које садрже центар), а које називамо **реална и имагинарна оса** хиперболе. На датој слици, то су координатне осе. Тачке у којима реална оса сјече хиперболу називају се тјемена хиперболе (A и A'). Тјемена хиперболе су тачке у којима су гране хиперболе најближе једна другој. Удаљеност од центра до темена хиперболе ($|OA| = a$) назива се **реална полуоса** хиперболе (на слици $a = 4$).



Показаћемо да је хипербола геометријско мјесто тачака чија је разлика од двије фиксне тачке константна. Те фиксне тачке називају се **фокуси**, или жиже хиперболе (на горњој слици F и F'), а њихове удаљености до дате тачке $M(x, y)$ на хиперболи називају се **потези**, или радијус-вектори ($|FM| = r$ и $|F'M| = r'$) те тачке. Разлика потега је константна ($|r' - r| = 2a$) и једнака је двострукој реалној полуоси.

Радећи са хиперболама, углавном се држимо ознака на горњој слици, гдје је (плаво) приказан граф хиперболе чија је једначина $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, при чему су велика и мала полуоса редом $a = 4$ и $b = 3$, линеарни ексцентрицитет $c = \sqrt{a^2 + b^2} = 5$, па су фокуси $F_{12}(\pm c, 0)$, односно $F(5, 0)$ и $F'(-5, 0)$.

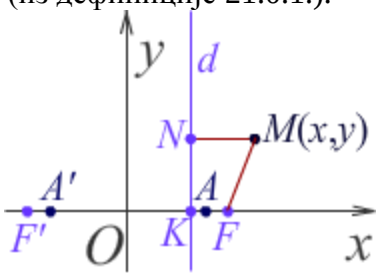
23.1. Елементи хиперболе

Дефиниција 23.1.1.
Хипербола (грч. *ὑπερβολή*, превише) је скуп свих тачака M у равни чије удаљености до једне фиксне тачке F те равни, коју називамо фокус, или **жижа хиперболе**, и удаљености до једне сталне праве d исте равни, коју називамо **директриса хиперболе** стоје у сталној размјери $e = const.$ ($e > 1$), коју називамо **ексцентрицитет хиперболе**. ♦

Другим рјечима, произвољна тачка M хиперболе има особину да је

$$|FM| : |MN| = e,$$

при чему је e константан реалан број већи од један. Полазећи од ове дефиниције, једначина хиперболе се изводи слично једначини елипсе (из дефиниције 21.0.1.).



Наиме, ако је K подножје нормале из F на директрису d онда тачке A и A' за које важи

$$|FA| = e|AK| \text{ и } |FA'| = e|A'K|$$

припадају хиперболи.

За координатни почетак узимамо тачку O која је средина дужи AA' и стављамо да је $|AA'| = 2a$. Апсцису постављамо дуж праве OK, а ординату окомито на OK.

Како је $|A'O| = |OA| = a$ и $|AF| = |OF| - |OA|$ и $|AK| = |OA| - |OK|$, из дефиниције је

$$|OF| - |OA| = e(|OA| - |OK|), \text{ тј.}$$

$$|OF| - a = e(a - |OK|).$$

На сличан начин из друге једначине дефиниције добијамо

$$|OF| + a = e(a + |OK|).$$

Рјешавањем добијеног система једначина по $|OF|$ и $|OK|$ добијамо $|OF| = ae$, $|OK| = \frac{a}{e}$. То значи да је жижа $F(ae, 0)$, а директриса $x = \frac{a}{e}$.

Став 23.1.2.
Тачка $M(x, y)$ припада хиперболи ако и само ако њене координате задовољавају

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ гдје је } b^2 = a^2(e^2 - 1).$$

Доказ: Ако тачка $M(x, y)$ припада хиперболи, тада је

$$|FM|^2 = (x - ae)^2 + y^2 \text{ и } |MN|^2 = \left(\frac{a}{e} - x\right)^2,$$

па из дефиниције слиједи $(x - ae)^2 + y^2 = e^2\left(\frac{a}{e} - x\right)^2$, одакле произилази

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2(e^2 - 1)} = 1$. Када уведемо број $b = a\sqrt{e^2 - 1}$ претходна једначина добија облик $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Обрнуто, ако су x и y бројеви за које важи једначина из става, тада је

$y^2 = b^2\left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right)$ па је $|FM|^2 = (x - ae)^2 + y^2 = (x - ae)^2 + b^2\left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right) =$

$(x - ae)^2 + a^2(e^2 - 1)\left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right) = x^2 - 2aex + a^2e^2 + (e^2 - 1)(x^2 - a^2) =$

$e^2\left(x^2 - 2\frac{ax}{e} + \frac{a^2}{e^2}\right) = e^2\left(\frac{a}{e} - x\right)^2 = e^2 \mid MN \mid^2$, што значи да тачка $M(x, y)$ припада хиперболи.♦

Неке од **особина хиперболе** су сада очигледне.

i. Обе координатне осе су осе симетрије хиперболе, што се види када x и/или y замјенимо са $-x$, односно $-y$ у њеној једначини (23.1.2.). Тачка O је њен центар симетрије.

ii. Хипербола није дефинисана за апсцисе унутар интервала $(-a, a)$. Наиме, из $\frac{x^2}{a^2} = 1 + \frac{y^2}{b^2} \geq 1$, слиједи $x^2 \geq a^2$, тј. $x \in (-\infty, -a] \cup [a, +\infty)$.

iii. Тачке $A'(-a, 0)$ и $A(a, 0)$ припадају хиперболи и то су једине пресјечне тачке хиперболе са x-осом. Тачке A' и A се често називају **тјемена** хиперболе. Права $A'A$ назива се **реална** (главна) **оса** хиперболе, а симетрала дужи $A'A$ назива се **имагинарна** (споредна) **оса** хиперболе. Број $a = \frac{1}{2} \mid A'A \mid$ назива се **реална полуоса**, а број $b = \sqrt{e^2 - 1} = \frac{1}{2} \mid BB' \mid$ је **споредна оса** хиперболе, гдје су тачке $B(0, b)$ и $B'(0, -b)$.

iv. **Линеарни ексцентрицитет** хиперболе је параметар $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.

v. **Нумерички ексцентрицитет** хиперболе је параметар $e = \frac{c}{a}$.

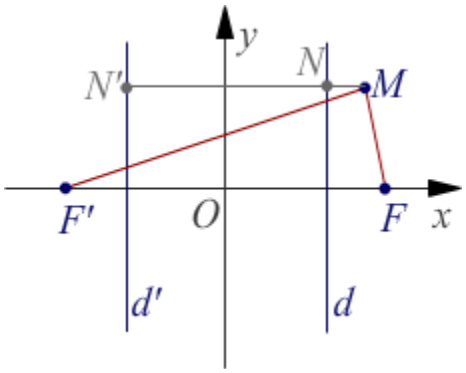
vi. Хипербола има **двије жиже** $F(ae, 0)$ и $F'(-ae, 0)$ и двије одговарајуће директрисе d и d', тј. $x = \pm\frac{a}{e}$, што је последица симетрије (i.) хиперболе.

Полазећи од жиже $F'(-ae, 0)$ и директрисе d', тј. $x = -\frac{a}{e}$, могуће је извести исту једначину хиперболе као што смо извели са F и d.

Став 23.1.3.
Разлика растојања ма које тачке хиперболе од њених жижа је константна. Прецизније речено, ако је тачка $M(x, y)$ на хиперболи, чије су жиже F и F' тада је

$$||F'M| - |FM|| = 2a.$$

Доказ: Нека је N подножје нормале из M на директрису d, а N' подножје нормале

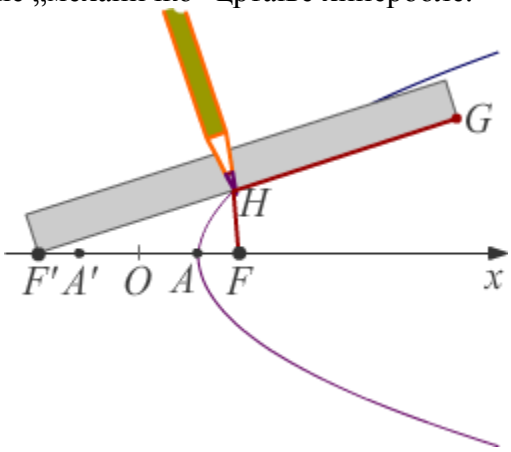


из M на директрису d'. Тада је $|FM| = e|MN|$ и $|F'M| = e|MN'|$, па ако је $x > 0$, тј. тачка M припада десној грани хиперболе, имамо $|F'M| - |FM| = e(|MN'| - |MN|) = e\left(\left(x + \frac{a}{e}\right) - \left(x - \frac{a}{e}\right)\right) = 2a$. Слично, за $x < 0$, ако M припада лијевој грани хиперболе, имамо $|FM| - |F'M| = 2a$. Дакле $\|F'M| - |FM\| = 2a$, као што је и требало доказати. ♦

Цртање 23.1.4.
На претходном ставу (23.1.3.) заснива се следеће „механичко“ цртање хиперболе.

Поставимо лењир тако да му је један крај причвршћен у тачки F' око које се лењир може окретати. Крајеве конца, дужине мање од дужине лењира, причврстимо у тачкама F и G, гдје је G други крај лењира.

Врхом оловке затегнемо конац, тако да врх клизи дуж лењира који се окреће око тачке F'. Кретање врха оловке описује хиперболу, као на слици десно. ♦



Геометријска конструкција је цртање помоћу самог шестара и лењира без подјеле. Слично претходном (цртање 23.1.4.), доказ сљедеће геометријске конструкције хиперболе такође такође се заснива на истом ставу (23.1.3.).

Конструкција 23.1.5.
Нека су F_1 и F_2 двије тачке равнине и реалан број a такав да је $0 < a < |F_1F_2|/2$.

Лењиром повучемо праву x која садржи тачке F_1 и F_2 и са O означимо средину дужи F_1F_2, затим у тачки O конструишемо праву y окомиту на x. Кружница полупречника a са средиштем O сјече праву x у тачкама A_1 и A_2 које припадају хиперболи.

Изван дужи F_1F_2 узмемо било било коју тачку T праве x. Опишемо кружницу k_1 полупречника $|A_1T|$ око тачке F_1 и кружницу k_2 полупречника $|A_2T|$ око тачке F_2. Те се двије кружнице сјеку у тачкама T_1 и T_2, које леже на оној грани хиперболе са које стране је тачка T. Узимањем различитих тачака T конструишемо произвољан број тачака хиперболе. ♦

Став 23.1.6.
Дужине потега, радијус-вектора тачке $M(x, y)$ на хиперболи су:

$$r_1 = \frac{c}{a}x - a \text{ и } r_2 = \frac{c}{a}x + a.$$

Доказ: Координате жиже су $F(\pm ae, 0)$. Рецимо, узмимо десну жижу, са знаком плус. Тада је један од потега $r = |FM| = \sqrt{(x-ae)^2 + y^2}$ = (замјенимо y^2 из једначине хиперболе) = $\sqrt{(x-ae)^2 + \frac{b^2}{a^2}x^2 - b^2}$ = (линеарни и нумерички ексцентрицитет iv. v.) = $\sqrt{e^2 - 2aex + a^2}$ = $|ex - a|$ = $\frac{c}{a}x - a$. Слично добијамо за други потег, полазећи од друге жиже.♦

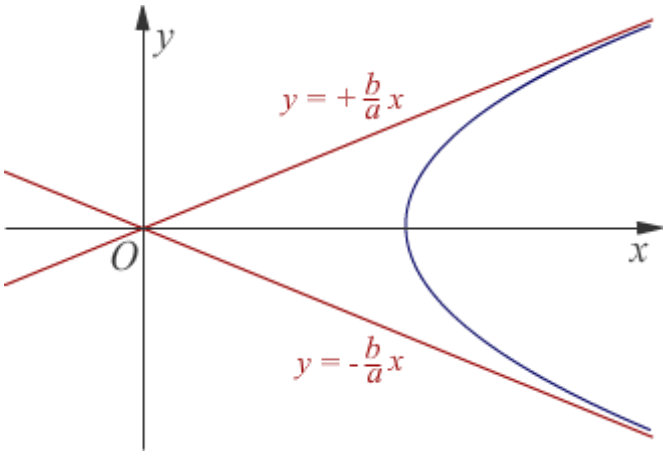
Сада (став 23.1.5.) непосредним одузимањем имамо $|r_1 - r_2| = \left|\left(\frac{c}{a}x - a\right) - \left(\frac{c}{a}x + a\right)\right|$ = $|-2a| = 2a$, тј. став 23.1.3.

Асимптота (грч. *ἀσύμπτωτος*, не поклапа се) неке криве је права (или друга крива линија) којој се дата крива неограничено приближава, без додиривања. Грубо речено, асимптоте су тангенте на дату криву у бесконачно далекој тачки.

Став 23.1.7.

Асимптоте хиперболе $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ су праве $y = \pm\frac{b}{a}x$.

Доказ: Једначину хиперболе пишемо у облику $\frac{y}{x} = \pm\frac{b}{a}\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}$. Када се за x узимају апсолутно све већи и већи бројеви ($x \to \pm\infty$), израз a^2/x^2 постаје све ближи нули ($\frac{a^2}{x^2} \to 0^+$), па израз под корјеном изведене једнакости постаје све ближе 1. Према томе количник y/x узима вриједности све ближе броју $\pm b/a$. Зато праве $y = \pm\frac{b}{a}x$ добро апроксимирају хиперболу када је |x|, па отуда и |y| велико.♦



Ако је $a = b$, хипербола постаје тзв. **једнакостранична** $x^2 - y^2 = a^2$. Асимптоте ове хиперболе $y = \pm x$ су узајамно окомите, па се она назива и **правоугла** хипербола.

Ако су жиже хиперболе на y-оси, симетрично око O, њена једначина је

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Тада је *y*-оса реална оса хиперболе, а *x*-оса је њена имагинарна оса.

Примјер 23.1.8.
Одредити полуосе, тјемена, жиже и директрисе, и асимптоте хиперболе

$$9x^2 - 16y^2 = 144.$$

Рјешење: Једначину ове хиперболе пишемо $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$, одакле налазимо велику и малу полуосу $a = 4$, $b = 3$. Тјемена су $A_{12}(\pm a, 0) = A_{12}(\pm 4, 0)$. Линаерни ексцентрицитет (iv.) је $c=\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{16+9} = 5$, а нумерички ексцентрицитет (v.) је $e=\frac{c}{a} = 5/4 = 1{,}25$. Жиже су $F_{12}(\pm c, 0) = F_{12}(\pm 5, 0)$ и одговарајуће директрисе, праве $x = \pm\frac{a}{e} = \pm 3{,}2$. Асимптоте су праве $y=\pm\frac{b}{a}x$, тј. $y = \pm 0{,}75x$. График је приказан на почетку поглавља (23. Хипербола). ♦

Примјер 23.1.9.

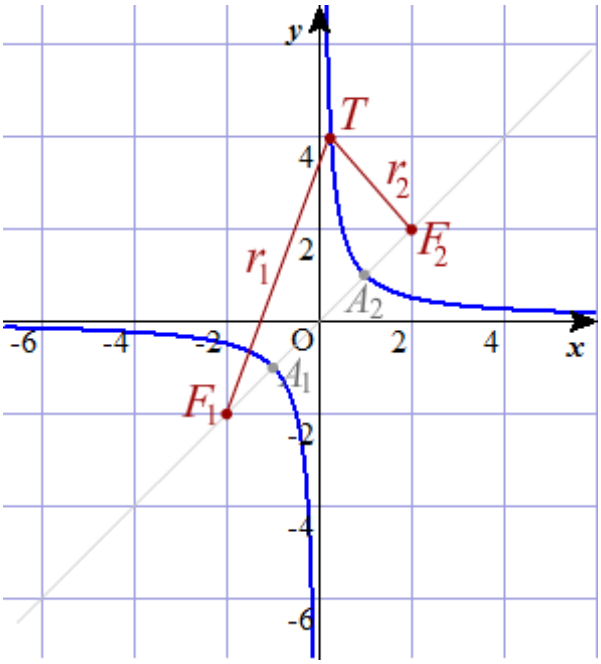
Показати да је граф функције $y=\frac{1}{x}$ хипербола.

Рјешење: Ротацијом система *Oxy* за угао $\alpha = -45°$ у систем *Ox'y'*, трансформишемо координате (примјер 19.3.1.) према формулама

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \end{cases}$$

и једначина $xy = 1$ прелази у $(x')^2 - (y')^2 = 2$, јер је $\cos(-45°) = -\sin(-45°) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. То је

једначина хиперболе са полуосама $a = b = \sqrt{2}$ и тјеменима $A'_{12}(\pm\sqrt{2}, 0)$. Линеарни и нумерички ексцентрицитет ове хиперболе су $c' = 2$ и $e' = \sqrt{2}$. Жиже су $F'_{12}(\pm 2, 0)$ са директрисама, редом $x = \pm 1$. Асимптоте ове хиперболе су симетрале координатних оса.



За произвољну тачку T' ове хиперболе важи једнаккост $|r'_1 - r'_2| = ||F'_1T'| - |F'_{2T'}|| = 2a = 2\sqrt{2}$.

Ротациојом ове хиперболе за угао $\alpha = +45°$, она прелази у хиперболу $xy = 1$.

Према томе, дата функција је такође хипербола, на слици десно (плаво), са жижама $F_{12}(\pm 2, \pm 2)$ и директрисама окомитим на главну осу, праву која пролази тим жижама. ♦

Задаци 23.1.10.

1. Полазећи од дефиниције (23.1.1.), наћи једначину хиперболе са датим фокусом, директрисом и константом e:

а) $F(4, 0)$, $x = 3$, $e = 1{,}5$; **б)** $F(5, 0)$, $x = 4$, $e = 1{,}6$; **в)** $F(-3, 0)$, $x = -2$, $e = 1{,}2$;
г) $F(-4, 0)$, $x = -3$, $e = 1{,}1$; **д)** $F(3, 3)$, $x + y = 1$, $e = 2$; **ђ)** $F(-3, -3)$, $x + y = -1$, $e = 2$.

2. Одредити полуосе, тјемена, жиже и директрисе, и асимптоте хиперболе:

а) $x^2 - y^2 = 1$; **б)** $4x^2 - 9y^2 = 36$; **в)** $25x^2 - 16y^2 = 400$;
г) $25x^2 - 9y^2 = 225$; **д)** $-9x^2 + 64y^2 = 36$; **ђ)** $-36x^2 + 25y^2 = 100$.

3. Наћи једначину хиперболе (облика $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$) чије су дате асимптоте и растојање међу директрисама: **а)** $y = \pm\frac{3}{4}x$ и 64/5; **б)** $y = \pm\frac{5}{4}$ и 4.

4. Израчунати једначину хиперболе ($\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$), ако она садржи тачке:

а) $M(1, 1)$ и $N(2, 3)$; **б)** $P(1, -2)$ и $Q(2, -4)$.

5. Која је једначина хиперболе са датом жижом и углом између асимптота:

а) $F(3\sqrt{2}, 0)$ и 60°; **б)** $F(2\sqrt{3}, 0)$ и 45°.

6. Саставити једначину хиперболе, ако је:

i. ексцентрицитет ¾, а растојање између жижа 5;

ii. растојање између жижа 6, а растојање између директриса 4;
iii. растојање између директриса 7, а ексцентрицитет 2;
iv. растојање између директриса 6,5 а асимптоте су $\sqrt{3}x \pm 2y = 0$;
v. једначине асимптота су $5x \pm 4y = 0$, а једна жижа је $F(3, 0)$.

7. Која хипербола са датим директрисама пролази датом тачком:
а) $x = \pm 1{,}2$ и $T(3, 5)$; **б)** $x = \pm 2{,}1$ и $T(3, -3)$.

8. Жиже тражене хиперболе су у тјеменима дате елипсе, а директрисе пролазе кроз жиже те елипсе:
а) $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{25} = 1$; **б)** $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{9} = 1$.

23.2. Хипербола и права

Пресјек праве и хиперболе налазимо рјешавајући систем једначина

$$y = kx + l,\ b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2.$$

Уврштавањем прве у другу и сређивањем добијамо квадратну једанчину

$$x^2(k^2a^2 - b^2) + 2kla^2x + a^2(b^2 + l^2) = 0.$$

Отуда, прве координате тачака пресјека су

$$x_{12} = \frac{-kla^2 \pm ab\sqrt{-k^2a^2 + b^2 + l^2}}{k^2a^2 - b^2}.$$

Одговарајуће вриједности y_{12} добијамо када x_{12} уврстимо у $y = kx + l$. Број (реалних) тачака пресјека зависи од вриједности дискриминанте квадратне једначине. Овдје:

i. $k^2a^2 - b^2 < l^2$ значи да имамо два реална различита рјешења;
ii. $k^2a^2 - b^2 = l^2$ значи да имамо једно реално рјешење;
iii. $k^2a^2 - b^2 > l^2$ значи да нема реалних рјешења.

Тако се доказује сљедећи резултат (памтимо: „кабл“).

Став 23.2.1.
Услов да би права $y = kx + l$ била тангента хиперболе $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ је

$$k^2a^2 - b^2 = l^2.\ \blacklozenge$$

Тангента у тачки хиперболе $T(x_1, y_1)$ се одређује налажењем диралишта

$$x_{12} = \frac{-kla^2 \pm ab\sqrt{-k^2a^2 + b^2 + l^2}}{k^2a^2 - b^2} = \text{(због услова тангирања 23.2.1.)} =$$

$$= \frac{-kla^2}{k^2a^2 - b^2} = \text{(опет због истог услова)} = = \frac{-kla^2}{l^2} = \frac{-ka^2}{l}.$$

Добили смо $x_1 = -ka^2/l$, а затим налазимо $y_1 = k\left(\frac{-ka^2}{l}\right)+l = \frac{-k^2a^2+l^2}{l} = -\frac{b^2}{l}$.

Дакле, координате диралишта праве $y = kx + l$ и хиперболе $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ су $T(-\frac{ka^2}{l}, -\frac{b^2}{l})$.

Даље, налазимо коефицијент смјера k и осјечак l хиперболе на y-оси. Из $y_1 = -\frac{b^2}{l}$ произилази $l = -\frac{b^2}{y_1}$, а из $x_1 = -\frac{ka^2}{l}$ излази $k = -\frac{l \cdot x_1}{a^2} = -\frac{lx_1}{a^2}\cdot\frac{y_1}{y_1} = \frac{(-ly_1)x_1}{a^2y_1} = \frac{b^2x_1}{a^2y_1}$ (замјена $-ly_1 = b^2$, са почетка).

Сада пишемо једначину тангенте у заданој тачки $T(x_1, y_1)$, која гласи

$$y = \frac{b^2 \cdot x_1}{a^2 \cdot y_1}\cdot x_1 - \frac{b^2}{y_1} \Rightarrow b^2x_1x - a^2y_1y = a^2b^2.$$

Тиме је доказан и следећи резултат.

Став 23.2.2.

Тангента хиперболе $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ у тачки $T(x_1, y_1)$ је $\frac{x_1 \cdot x}{a^2}-\frac{y_1 \cdot y}{b^2}=1$.♦

Једначина тангенте из тачке изван хиперболе се одређује слично као и код елипсе.

Полара хиперболе из тачке $T(x_0, y_0)$ се такође налази као код елипсе. Резултат је $\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=1$, тј. права која пролази диралиштима тантената повучених из тачке $T(x_0, y_0)$ на хиперболу $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. Тачка $T(x_0, y_0)$ се зове **пол** поларе.

Примјери 23.2.3.

1. Наћи дужину тетиве коју на хиперболи $x^2 - 4y^2 = 20$ одсјеца $2x - y - 10 = 0$.

Рјешење: Уврстимо $y = 2x - 10$ у једначину хиперболе, добијамо $3x^2 - 32x + 84 = 0$. Рјешења ове квадратне једначине су $x_1 = 6$ и $x^2 = 14/3$, па налазимо $y_1 = 2$ и $y_2 = -2/3$. Дакле, сјецишта праве и хиперболе су $C_1(6, 2)$ и $C_2(14/3, -2/3)$, а растојање између њих $|C_1C_2| = 4\sqrt{5}/3$.♦

2. У пресјеку праве $y = 3$ и хиперболе $16x^2 - 25y^2 = 400$ повучене су тангенте на хиперболу. Колика је површина троугла што га чине тангенте и дата права?

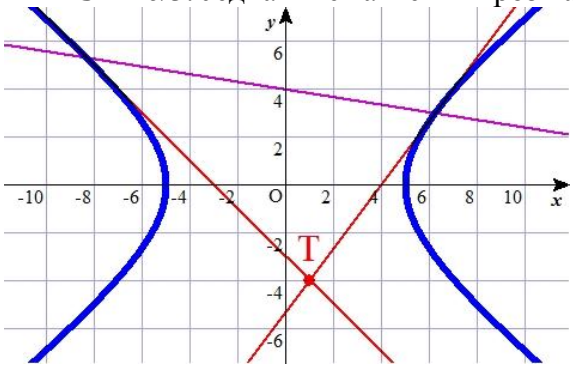
P: Пресјеци праве и хиперболе су $T_{12}(\pm 25/4, 3)$, а тангенте у тим тачкама су $4x \pm 3y \pm 16 = 0$. Тангенте се сјеку у тачки $T_3(0, -16/3)$. Површина троугла $T_1T_2T_3$ је 625/12 квадратних јединица.♦

3. Права $5y = 3x$ је асипмптота хиперболе, а тангента је $y = x - 8$. Како гласи једначина хиперболе?

P: Како је права $y = (3/5)x$ асимптота, то је $b/a = 3/5$. Из $y = x - 8$ и услова додира $k^2a^2 - b^2 = l^2$ је $l^2a^2 - b^2 = (-8)^2$. Из система $b = \frac{3}{5}a$, $a^2 - b^2 = 64$ слиједи $a = 10$, $b = 6$, те $x^2/100 - y^2/36 = 1$.♦

4. На хиперболу $16x^2 - 25y^2 = 400$ повући тангенте из тачке $T(1, -4)$.

P: I *начин* – рјешење помоћу поларе. Једначина поларе је $x_0x/a^2 - y_0y/b^2 = 1$, што је у овом случају x/25 + 4y/16 = 1. Пресјеци поларе и хиперболе воде до кв. једначине $12x^2 + 25x - 625 = 0$,чија рјешења x_{12} су 25/4 и -25/3, а затим налазимо $y_{12} = -4x_{12}/25 + 4 = 3$ и 16/3. Једначине тангенти кроз нађена диралишта, према једначини тангенте $x_{12}x/a^2 - y_{12}y/b^2 = 1$, након сређивања су $4x - 3y - 16 = 0$ и $x + y + 3 = 0$.



II *начин* – помоћу услова додира. Тангенте пролазе тачком T(1, -4) и имају облик праве $y = kx + l$. Увртавањем координата тачке у једначину праве налазимо $k + l = -4$. Уз то, важи услов додира $k^2a^2 - b^2 = l^2$, одакле $25k^2 - 16 = l^2$. Из двије добијене једначине налазимо $3k^2 - k - 4 = 0$, те $k_{12} = 4/3$ и -1, затим је $l_{12} = -16/3$ и -3. Дакле, једначине тангенти су $y = \frac{4}{3}x - \frac{16}{3}$ и $y = -x - 3$, односно исте оне добијене на претходни начин. На овај начин се не добијају координате диралишта.

III *начин*. Задатак можемо поставити и овако. Како диралиште (x_1, y_1) лежи на хиперболи, важи $16x_1^2 - 25y_1^2 = 400$. Како тачка $T(1, -4)$ лежи на тангенти $x_1x/a^2 - y_1y/b^2 = 1$ биће ($x = 1$ и $y = -4$) $x_1/25 + y_1/4 = 1$. Према томе, опет имамо исти систем као у I начину.♦

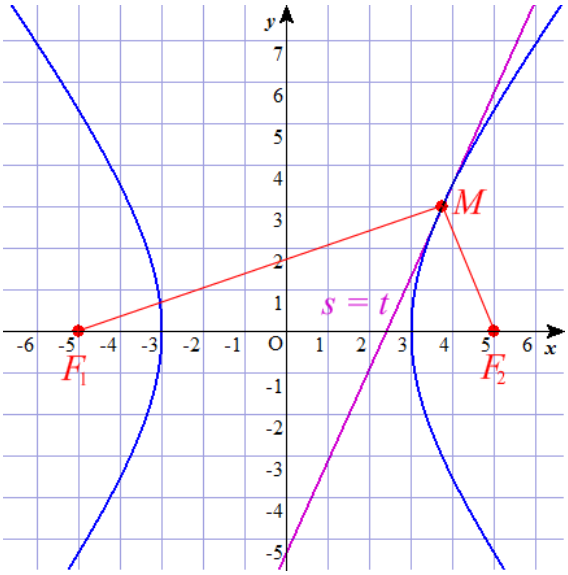
5. На хиперболи $3x^2 - 4y^2 = 72$ наћи тачку M_1 која је најближа правој $3x + 2y + 1 = 0$, и на правој наћи тачку M_2 која је најближа хиперболи. Наћи дужину $|M_1M_2|$.

P: Поставимо тангенту паралелно са датом правом. Коефицијент смјера праве $k_p = -\frac{3}{2}$ једнак је коефицијенту смјера тангенте $k_t = \frac{b^2x_1}{a^2y_1}$, па је $\frac{18x_1}{24y_1} = -\frac{3}{2}$, тј. $x_1 =$

$-2y_1$. Обзиром да је диралиште (x_1, y_1) на хиперболи, биће $3x_1^2 - 4y_1^2 = 72$. Рјешавањем система налазимо два диралишта $D_1(-6, 3)$ и $D_2(6, -3)$. Како су растојања $|pD_1| = \frac{12}{\sqrt{13}}$ и $|pD_2| = \frac{13}{\sqrt{13}}$, у обзир долази само тачка $D_1(-6, 3)$ и то је тражена тачка M_1.

Да би одредили координате тачке M_2, поставимо нормалу у тачки M_1. Једначина нормале је $2x - 3y + 21 = 0$. Пресјек нормале и дате праве је тачка $M_2(-45/13, 61/13)$, а растојање $|M_1M_2| = \frac{11\sqrt{13}}{13}$. ♦

7. До тачке $M(15/4, 3)$ хиперболе $16x^2 - 9y^2 = 144$ повучени су радијус вектори. Доказати да је симетрала угла између њих тангента хиперболе у датој тачки.



Р: Једначина тангенте у тачки $M(15/4, 3)$ је $16 \cdot \frac{15}{4} \cdot x - 9 \cdot 3 \cdot y = 144$, тј. $20x - 9y - 48 = 0$. Фокуси хиперболе су $F_{12}(\pm 5, 0)$, па су једначине радијус вектора r_1 и r_2

$$y - 0 = \frac{3 - 0}{\frac{15}{4} - (\pm 5)} \cdot \left(x - (\pm 5)\right), \text{ тј.}$$

$12x - 35y + 60 = 0$ и $12x + 5y - 60 = 0$. Једначина симетрале угла (у којем се налази исходиште) између ових радијус вектора је

$$\frac{12x - 35y + 60}{-\sqrt{12^2 + (-35)^2}} - \frac{12x - 35y + 60}{+\sqrt{12^2 + 5^2}} = 0, \text{ тј.}$$

$$600x - 270y - 1440 = 0,$$

односно $20x - 09y - 48 = 0$, а то је идентично једначини тангенте. ♦

8. Права $-3x + 20y = 60$ је полара хиперболе $9x^2 - 16y^2 = 144$. Које су координате пола?

Р: Једначина поларе дате хиперболе је $9x_0x - 16y_0y - 144 = 0$. Упоређивањем са датом правом налазимо $9x_0 = -3\lambda$, $-16y_0 = 20\lambda$ и $-144 = -60\lambda$, гдје је ламбда непознати параметар. Из треће једначине налазимо $\lambda = 12/5$, што уврштено у прве двије даје $x_0 = -4/5$ и $y_0 = -3$. Према томе, нађене су координате пола $(-\frac{4}{5}, -3)$. ♦

9. У којим тачкама и под којим углом се сијеку криве $4x^2 - 9y^2 = 36$ и $16x^2 + 45y^2 = 720$?

Р: Помножимо прву једначину са 5 и саберимо са другом. Добијамо $36x^2 = 900$, тј. $x_{12} = \pm 5$. Затим налазимо $y_{12} = \pm 8/3$. Добили смо четири тачке $(\pm 5, \pm 8/3)$ у којима се

кривуље сјеку. Тангенте у једној (плус, плус) на хиперболи и елипси су редом $4\cdot 5\cdot x - 9\cdot\frac{8}{3}\cdot y = 36$ и $16\cdot 5\cdot x + 45\cdot\frac{8}{3}\cdot y = 720$, тј. $5x - 6y = 9$ и $2x + 3y = 18$.

Коефицијенти смјера тих тангенти су $k_h = \frac{5}{6}$ и $k_e = -\frac{2}{3}$, па је тангенс угла између њих $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{-\frac{2}{3}-\frac{5}{6}}{1+\frac{5}{6}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)} = -\frac{27}{8}$, односно $\operatorname{tg}(180° - \varphi) = \frac{27}{8}$, те $\varphi = 106°30'16''$.♦

10. Одредити једначине заједничких тангенти кривих $25x^2 + 100y^2 = 4$ и $x^2 - 3y^2 = 1$.

Р: Дате криве су $\frac{x^2}{\frac{4}{25}} + \frac{y^2}{\frac{1}{25}} = 1$ и $\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{\frac{1}{3}} = 1$. Према услову додира за елипсу и хиперболу имамо $\frac{4}{25}k^2 + \frac{1}{25} = l^2$ и $k^2 - \frac{1}{3} = l^2$. Рјешавањем овог система имамо $k_{12} = \pm\frac{2}{3}$ и $l_{12} = \pm\frac{1}{3}$, што значи четири заједничке тангенте $y = \pm\frac{2}{3}x \pm \frac{1}{3}$.♦

Задаци 23.2.4.

1. Наћи једначину тангенте хиперболе $25x^2 - 9y^2 = 225$ у тачки додира (5, -20/3).

[$25x + 12y - 45 = 0$]

2. Из тачке (1, -10) конструисане су тангенте на хиперболу $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{32} = 1$. Наћи:

i. једначину тетиве која спаја тачке додира (тј. полару);
ii. координате тачки додира и једначине тангенти.

[$2x + 5y - 16 = 0$; (-11/3, 14/3), (3, 2), $22x + 7y + 48 = 0$, $6x - y - 16 = 0$]

3. Наћи једначине тангенти хиперболе $8x^2 - 16y^2 = -128$ паралелних са правом $2x + 4y - 5 = 0$ и израчунати растојање међу њима.

[$x + 2y = \pm 4$, $8/\sqrt{5}$]

4. Наћи једначину хиперболе чије су асимптоте $2y \pm x = 0$ и тангента $5x - 6y - 8 = 0$.

[$x^2 - 4y^2 = 4$]

5. Одредити нормалу хиперболе $x^2 - 2y^2 = 2$, која је паралелна с правом $x - y = 0$.

[$y = x \pm 3$]

6. Написати једначину хиперболе коју дирају праве $5x - 6y - 16 = 0$ и $13x - 10y - 48 = 0$.

[$x^2 - 4y^2 = 16$]

7. Наћи једначину тангенте хиперболе $x^2 - 12y^2 = 36$ која с правом $x + 2y = 0$ затвара угао од 45°.

8. Права пролази тачкама $A(2, 0)$ и $B(6, 4)$. Колика је полуоса хиперболе $b^2x^2 - 8y^2 = 8b^2$ да би права била њена тангента?

9. Провјерити да ли су криве $9x^2 + 25y^2 = 225$ и $3x^2 - y^2 = 12$ окомите. Другим рјечима, да ли су тангенте у њиховим сјециштима окомите.

10. Одредити оне тангенте хиперболе $20x^2 - 36y^2 = 720$ чија удаљеност од исходишта износи $\sqrt{8}$.

11. Одредити полару тачке (1, 11) обзиром на хиперболу $25x^2 - 9y^2 = 225$.

12. Права $8x - 45y - 36 = 0$ је полара хиперболе $4x^2 - 9y^2 = 36$. Које су координате пола?

13. Одредити једначине тангенти повучених из тачке $T(-3, 5)$ на хиперболу $3x^2 - y^2 = 3$ помоћу поларе.

14. Одредити пресјек асипмптота хиперболе $x^2 - 3y^2 = 12$ са кружницом чије средиште је у десној жижи хиперболе а пролази исходиштем координатног система.

VII Низови

24. Математичка индукција

Претпоставимо да имамо низ тврђења T_1, T_2, ..., T_n, … за која важи:

i. тврђење T_1 је тачно;

ii. ако је тачно тврђење T_n тада је увијек тачно тврђење T_{n+1} .

Тада је тврђење T_n тачно за сваки $n \in \mathbf{N}$.

То је **принцип математичке индукције**, који можемо упоредити и са тзв. домино ефектом.

Да би доказали да су сви искази у бесконачном низу исказа тачни, докажемо да је први од њих тачан, затим докажемо импликацију, ако је неки (n-ти) исказ тачан онда је тачан и следећи (n+1.).

Доказивање методом математичке индукције има разноврсне примјене.

За разлику од потпуне, математичке, непотпуном, **емпиријском индукцијом** провјеравамо тачност само неких исказа из бесконачног низа, чиме у најбољем случају можемо наслутити тачност свих.

Трагови доказивања помоћу потпуне индукције могу се наћи већ у записима Платона (427–347. ст. ере), Зенона (333-264 г. пне.) и Еуклида (око 300. г.п.н.е.).

А. Островски (*Алекса́ндр Ма́ркович Остро́вский*, 1893 – 1986.) је наводио да је Л. Герсон (*Levi ben Gershon*, 1288–1344.) године 1321. први прецизно исказао принцип математичке индукције.

Према неким историчарима, проналазачи математичке индукције сматрају се Ф. Мауролико (*Francesco Maurolico*, 1494 – 1575.) и Ј. Бернули (*Johann Bernoulli*, 1667 – 1748.), док је М. Кантор (*Moritz Benedikt Cantor*, 1829 – 1920) сматрао да је Б. Паскал (*Blaise Pascal*, 1623 – 1662) проналазач овог принципа. Према најновијим историјским проучавањима, изгледа да је заиста Б. Паскал најзаслужнији за јасно формулисање принципа математичке индукције.

24.1. Низови исказа

Знамо да је математички исказ изјава за коју можемо утврдити да ли је тачна или нетачна. Типично, искази су једнакости, неједнакости, али и нека друга тврђења попут: „број 52 је дјељив бројем 13“. Математичком индукцијом доказујемо тачност свих у бесконачном низу одређених исказа.

Овдје су нам најважнији низови ($\forall n \in \mathbf{N}$) исказа T_n облика

1. $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n = S_n$, тј. $\sum_{k=1}^{n} a_k = S_n$;
2. Тригонометријски идентитети;
3. $p \mid f(n)$;
4. $A_n \le B_n$;

затим њихове комбинације, па остали облици тврђења.

Напомена:
Израз $a|b$ читамо: „a дјели b“, што значи да је број b дјељив бројем a ($a, b \in \mathbf{N}$).

Примјер 24.1.1.
Разматрамо збирове првих непарних природних бројева:

T_1:	$1 = 1$
T_2:	$1 + 3 = 2^2$
T_3:	$1 + 3 + 5 = 3^2$
…	…
T_n:	$1 + 3 + \ldots + (2n - 1) = n^2$

Другим рјечима, претпостављамо да је n-то тврђење једнакост $\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$, коју ћемо сада доказати методом математичке индукције.

Доказ: Први корак математичке индукције (i), да је T_1 тачно, очигледно важи.

Доказаћемо други корак математичке индукције (ii), импликацију, ако је за сваки природни број n тачно T_n, тада је тачно T_n+1. Дакле: претпостављамо да је тачно $\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$ и на основу тога требамо доказати да је тачно $\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1) = (n+1)^2$.

Наиме, $\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1) = 1+3+5+...+(2n-1)+(2n+1) =$

$$= \left(1+3+...+(2n-1)\right)+(2n+1)$$
$$= \sum_{k=1}^{n}(2k-1)+(2n+1)$$
$$= n^2+(2n+1)$$
$$= (n+1)^2.$$

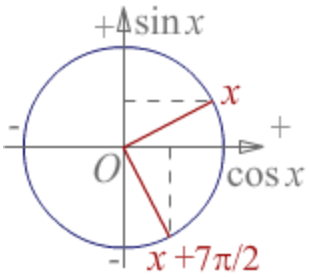
Наведени низ једнакости су идентитети ($\forall n \in \mathbf{N}$), што значи да је тачан други корак индукције. Према томе, тачно је свако тврђење T_n.♦

Примјер 24.1.2.
Докажимо методом математичке индукције да је тачан низ једнакости

$$(\forall n \in \mathbf{N}) \quad \sin\left(\frac{4n+3}{2}\pi + x\right) = -\cos x.$$

Доказ: Провјеравамо први корак (i), тврђење T_1, тј. једнакост

$$\sin\left(\frac{4\cdot 1+3}{2}\pi + x\right) = -\cos x \text{, тј. } \sin\left(x + \frac{7}{2}\pi\right) = -\cos x,$$



што се на графу тригонометријске кружнице десно види да је тачно. Затим доказујемо импликацију (ii) $T_n \Rightarrow T_{n+1}$. Претпоставка је да је T_n тачно, а користећи ту претпоставку доказаћемо да је тачно T_{n+1}, тј. да је

$$\sin\left(\frac{4n+7}{2}\pi + x\right) = -\cos x.$$

Наиме, $\sin\left(\frac{4n+7}{2}\pi + x\right) = \sin\left(\left(\frac{3n+7}{2}\pi + x\right) + 2\pi\right) = \sin\left(\frac{3n+7}{2}\pi + x\right) =$ (према претпоставци импликације) $= -\cos x$. Дакле, доказана су оба корака индукције, што значи да је за сваки природни број n тачна наведена тригонометријска једнакост.♦

Примјер 24.1.3.
Доказати да је ($\forall n \in \mathbf{N}$) број $f(n) = n^3 + 11n$ дјељив са $p = 6$.

Доказ: Емпиријском индукцијом само (необавезно) провјеравамо да је број $f(1) = 1^3 + 11\cdot 1 = 12$ дјељив бројем $p = 6$, затим да је $f(2) = 2^3 + 11\cdot 2 = 30$ дјељив бројем $p = 6$, да је $f(3) = 60$ такође дјељиво са 6, итд. Међутим, радећи само емпиријском индукцијом не можемо доказати да је за баш сваки природни број n број $f(n)$ дјељив датим бројем p. Ипак, провјерили смо први корак (i) математичке индукције.

За доказ другог корака (ii), из претпоставке да $p|f(n)$ доказујемо посљедицу $p|f(n+1)$. Наиме, $f(n+1) = (n+1)^3 + 11(n+1) =$

$$= (n^3 + 3n^2 + 3n + 1) + (11n + 11)$$
$$= (n^3 + 11n) + (3n^2 + 3n + 12).$$

Добили смо два сабирка (у заградама). Први је дјељив са $p = 6$ по претпоставци, а други зато што је сваки од његових сабирака ($3n^2$, $3n$ и 12) дјељив са 6. Према томе, збир је дјељив са 6. Тиме је доказана импликација (ii). На основу принципа математичке индукције, закључак је да је за сваки природни број n број $f(n)$ дјељив датим бројем p.♦

Сљедећи примјери су узети из књижице Д. С. Митриновић: Математичка индукција, Грађевинска књига, Београд, 1970.

Примјер 24.1.4.
Ако је n природан број, доказати став: $a > b > 0 \Rightarrow a^n > b^n$.

Доказ: (i) Релација $a^n > b^n$ важи за $n = 1$ јер је по претпоставци $a > b$. (ii) Претпоставимо сада да релација важи за $n = k \in \mathbf{N}$, тј. да је $a^k > b^k$. Након множења са $a > 0$, та неједнакост постаје $a^{k+1} > ab^k$. Због $a > b$ је $a^{k+1} > ab^k > b^{k+1}$. Овим смо доказали импликацију, што значи да је наведена релација тачна за сваки природни број n.♦

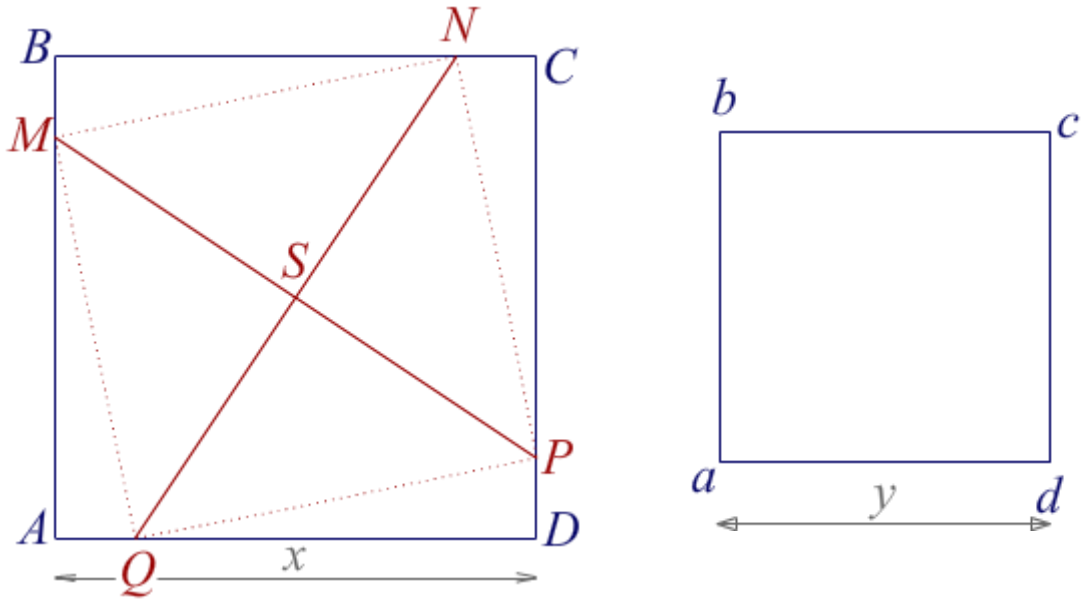
Примјер 24.1.5.
Доказати да се n квадрата могу исјећи на дјелове тако да се из њих може саставити нови квадрат.

Доказ: Посматрајмо два квадрата $ABCD$ и $abcd$ чије су странице x и y ($x > y$). На страницама већег квадрата уочимо тачке M, N, P , Q једнако удаљене од тјемена A, B, C, D тако да је

$$|AM| = |BN| = |CP| = |DQ| = \frac{1}{2}(x + y),$$

па је

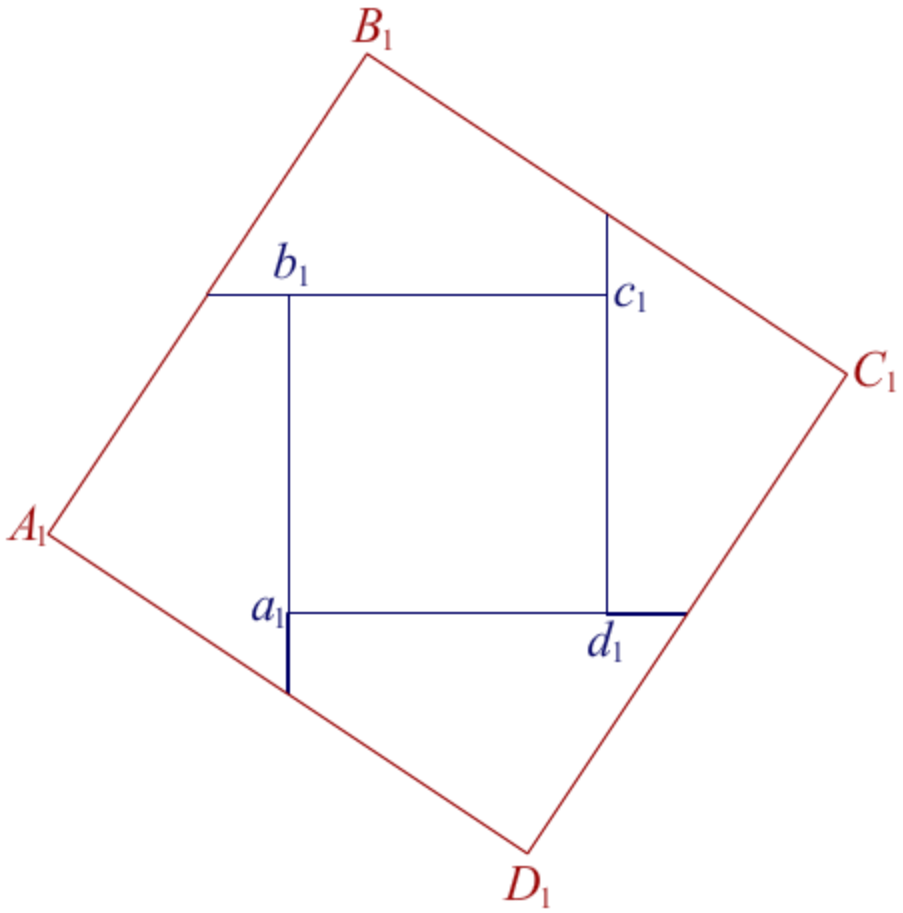
$$|MB| = |NC| = |PD| = |QA| = \frac{1}{2}(x - y).$$



Четвороугао $MNPQ$ је квадрат. Расјецимо квадрат $ABCD$ по дијагоналама MP и NQ квадрата $MNPQ$. Тако добијамо четири подударна четвороугла $AMSQ$, $BNSM$, $CPSN$ и $DQSP$. Састављањем ових четвороугова и квадрата $abcd$ добија се квадрат $A_1B_1C_1D_1$, на сљедећој слици. Тиме је доказан први корак (i) математичке индукције.

Претпоставимо сада да је тврђење истинито за k ($k \geq 2$) квадрата $q_1, \ldots, q_k$, тј. да се од њих може образовати један квадрат. Из овог квадрата и још једног произвољног квадрата q_{k+1} може се, на показани начин, саставити један квадрат.

Према томе, ако се из k квадрата њиховим исјецањем на дјелове, може саставити нови квадрат, исти ће случај бити и са k+1 квадрата. Будући да се из два квадрата може, на наведени начин, саставити један квадрат, из три квадрата се може саставити један квадрат, итд.



♦

Примјер 24.1.6.

Доказати $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n}\le\frac{1}{\sqrt{3n+1}}$ $(\forall n\in\mathbf{N})$.

Доказ: За $n = 1$ дата релација важи. Претпоставимо да она важи за $n = k$, тј. да је

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2k-1}{2k}\le\frac{1}{\sqrt{3k+1}}.$$

Помножимо обе стране ове релације са позитивним бројем $\frac{2k+1}{2k+2}$, добијамо

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2k-1}{2k}\cdot\frac{2k+1}{2k+2}\le\frac{1}{\sqrt{3k+1}}\cdot\frac{2k+1}{2k+2}.$$

Ако је (*) $\frac{1}{\sqrt{3k+1}}\frac{2k+1}{2k+2}\le\frac{1}{\sqrt{3(k+1)+1}}$ тада би била доказана тражена импликација.

Претпоставимо да је (*) неистинито, тј. да је

(**) $$\frac{1}{\sqrt{3k+1}}\frac{2k+1}{2k+2}>\frac{1}{\sqrt{3(k+1)+1}}.$$

Ово је еквивалентно редом са

$$\frac{1}{3k+1}\frac{(2k+1)^2}{(2k+2)^2} > \frac{1}{3k+4},$$

$$12k^3+28k^2+19k+4 > 12k^3+28k^2+20k+4,$$

$$19k > 20k,$$

$$19 > 20 \text{ (jep je } k > 0).$$

Претпоставка (**) довела је до апсурда: 19 > 20. Према томе је (*) истинито. ♦

Низ индекса тврђења T_m, T_{m+1}, T_{m+2}, …, T_n, … може почети од неког другог цјелог броја m умјесто броја 1, а да је такође свако до тврђења из таквог бесконачног низа тачно. Тада се први корак индукције (i) односи на прво тврђење у низу, тј. T_m, док је други корак (ii) исти.

Примјер 24.1.7.

Доказати да број 2^{2^n} ($n \geq 2$ природан број) на мјесту јединица има цифру 6.

Доказ: Претпоставимо да је $M = 2^{2^n}$ број чија је последња цифра 6. Ако једнакост квадрирамо добијамо $M^2 = \left(2^{2^n}\right)^2$, тј. $M^2 = 2^{2^{n+1}}$. Како се број M завршава цифром 6, то се и број M^2 завршава цифром 6. Како и почетни број (за n = 2), тј. број $2^{2^2} = 2^4 = 16$ завршава цифром 6, то је доказ математичком индукцијом завршен. ♦

Примјер 24.1.8.

Доказати неједнакости:

1. $2^n > n$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$);
2. $2^n > n^2$ (n = 5, 6, 7, …);
3. $2^n > n^3$ ($n = 10, 11, \ldots$);
4. $3^n > n^4$ ($n = 8, 9, \ldots$).

Доказ: (1.) Означимо са $T(n)$ ово тврђење. $T(0)$ је тачно јер је $2^0 > 0$. Претпоставимо да је $T(n)$ тачно за неко $n \geq 0$. Из $2^n > n$ и $2^n \geq 1$ (за неко $n \geq 0$) сабирањем добијамо $2 \cdot 2^n > n + 1$. Према томе, доказали смо и $T(n) \Rightarrow T(n+1)$.

(4.) За $n = 8$ заиста је $3^8 > 8^4$. Претпоставимо да је истинита неједнакост $3^k > k^4$ за неко k ≥ 8. Ако је истинита и неједнакост (*) $3 > \frac{(k+1)^4}{k^4}$ тада множењем са претходном излази $3^{k+1} > (k+1)^4$. Докажимо сада неједнакост (*). Ради тога пођимо од идентитета $\frac{(k+1)^4}{k^4} = \left(1+\frac{1}{k}\right)^4 = 1+\frac{4}{k}+\frac{6}{k^2}+\frac{4}{k^3}+\frac{1}{k^4}$. Како је $\frac{4}{k}+\frac{6}{k^2}+\frac{4}{k^3} < 1$ за $k = 6, 7, \ldots$, добијамо $\frac{(k+1)^4}{k^4} < 3$. Према томе, неједнакост (*) важи за $k \geq 6$. Овим је доказ (4.) индукцијом завршен. ♦

Математичка индукција се понекад примјењује и по једној од следећих шема.

- Претпоставља се да је неки исказ истинит за $n = k - 1$ и $n = k$ па се из тога изводи закључак да је истинит за $n = k + 1$. Затим се провјерава истинитост исказа за $n = 1$ и $n = 2$.
- Претпоставља се да су искази истинити за $n = k - r$, $n = k - (r - 1)$, …, $n = k$, где је $k \geq r$. Из тога се доказује тачност исказа за $n = k + 1$. Затим се доказује истинитост за $n = 1$, …, r.

Примјер 24.1.9.
Доказати да се $\cos nx$, гдје је n природан број, може изразити помоћу полинома степена n по $\cos x$.

Доказ: Тврђење је тачно за $n = 1$, 2 и 3, јер је

$$\cos x = \cos x,\ \cos 2x = 2\cos^2 x - 1 \text{ и } \cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x.$$

Између $\cos(k+1)x$, $\cos kx$ и $\cos(k-1)x$ постоји једнакост

$$\cos(k+1)x = 2\cos kx \cdot \cos x - \cos(k-1)x.$$

Претпоставимо да се $\cos(k-1)x$ и $\cos kx$ могу изразити као полиноми по $\cos x$ респективно степена $k-1$ и k. Полазећи од последње једнакости, закључујемо да се $\cos(k+1)x$ може изразити као полином по $\cos x$ степена $k+1$.
Будући да је наведено тврђење истинито за $n = 1$ и $n = 2$, оно је према доказаном истинито и за $n = 3$. Како је оно истинито за $n = 2$ и $n = 3$, истинито је и за $n = 4$, итд.
Према томе, $\cos nx$ се може изразити као полином по $\cos x$ степена n. ♦

Дешава се да неко тврђење зависи од више промјенљивих $n_1, n_2, \ldots$ које су природни бројеви. Практично се и такав случај може свести на случај једне промјенљиве, али са компликованијом примјеном математичке индукције.

Примјер 24.1.10.
Ако су квадратне матрице A и B комутативне, онда су комутативне и матрице A^r и B^s, гдје су r и s природни бројеви.

Доказ: За $r = 1$ тврдимо да је $AB^s = B^sA$, када је $AB = BA$. Наведена формула очигледно важи за $s = 1$. Претпоставимо да важи и за $s = k$, гдје је k неки природан број. Помножимо $AB^k = B^kA$ сдесна са B, добијамо $AB^{k+1} = (B^kA)B \ldots = B^k(AB) = B^k(BA)$, те је $AB^{k+1} = B^{k+1}A$. Према томе, помоћу математичке индукције смо доказали

$$(\mathrm{AB} = \mathrm{BA}) \Rightarrow (AB^s = B^sA),\ \forall s \in \mathbf{N}.$$

Претпоставимо сада да је доказана формула тачна за $r = m$, гдје је m природан број, тј. да је $A^mB^s = B^sA^m$. Множимо ову једнакост слијева са A, добијамо $A^{m+1}B^s = A(B^sA^m) \ldots = (AB^s)A^m = (B^sA)A^m = B^sA^{m+1}$. Овим смо доказали импликацију

$$(\mathrm{AB} = \mathrm{BA}) \Rightarrow (A^rB^s = B^sA^r),\ \forall r, s \in \mathbf{N}.$$

Формула важи и ако су r и/или s једнаки нули. ♦

Историја математике је пуна погрешних закључака изведених непотпуном, емпиријском, умјесто математичком индукцијом.

Примјер 24.1.11.
Кинези су прије више од 25 вијекова исказали став: Природни број $n > 1$ је прост ако и само ако је број $2^n - 2$ дјељив са n. Лајбниц је такође нетачно тврдио (1681.) да број $2^n - 2$ није дјељив са n ако n није прост број.

Ови искази заиста важе за све $n < 341 = 11\cdot 31$, док је број $2^{341} - 2$ дјељив са (сложеним) бројем 341, међутим не важе за број $n = 341$.

Наиме, број $2^{30} - 1$ је дјељив са $2^{10} - 1 = 1023 = 3\cdot 341$, што значи да је број $2^{11} - 2$ дјељив са 341. Како је $2^{31} - 2 = 2((2^{10})^3 - 1)$, закључујемо да из $341|(2^{31} - 1)$ слиједи $341|((2^{31})^{11} - 2^{11})$. Према томе имамо $341|(2^{11} - 2) \wedge 341|((2^{31})^{11} - 2^{11}) \Rightarrow 341|((2^{31})^{11} - 2^{11} + 2^{11} - 2) \Rightarrow 341|(2^{341} - 2)$. Тиме је доказано и да постоји бесконачно много сложених бројева n за које важи $n|(2^n - 2)$.♦

Неки исказ је доказан методом потпуне, математичке индукције ако су доказана оба корака (i) и (ii). Сљедећа два примјера илуструје неопходност корака (i).

Примјер 24.1.12.
Доказати да је за нетачан низ тврђења $T(n) : 1 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1}$ тачна импликација $T(n) \Rightarrow T(n+1)$.

Доказ: Претпоставимо да је за неко $n = k$ тачно $T(k)$, тј. $1 + 2 + \ldots + 2^k = 2^{k+1}$. Додајући на обе стране једнакости 2^{k+1} добијамо да је тачно и $1 + 2 + \ldots + 2^k + 2^{k+1} = 2\cdot 2^{k+1} = 2^{k+2}$, тј. тачно је и $T(k+1)$. Према томе, доказали смо импликацију $T(n) \Rightarrow T(n+1)$, мада сама тврђења T нису тачна, јер збир на лијевој страни датих једанкости има вриједност $2^{n+1} - 1$, тј. увијек је за један мањи од дате вриједности на десној страни.♦

Задатак 24.1.13.

Показати да за низ нетачних тврђења $T(n) : 1 + 2 + \ldots + n = \frac{1}{2}\left(n + \frac{1}{2}\right)^2$, гдје је n природан број, важи импликација $T(n) \Rightarrow T(n+1)$. Међутим, збир на лијевој страни једнакости није једнак вриједности на десној страни.♦

Став (ii) називамо **индуктивна хипотеза**. Ево још једног примјера (поред 24.1.11.) неопходности индуктивне хипотезе, тј. корака (ii).

Задатак 24.1.14.
Показати да су бројеви $f(n) = n^2 + n + 41$ прости за $n = 0, 1, \ldots, 39$. Међутим, број $f(40) = 41^2$ није прост.♦

Задаци 24.1.15.

1. Доказати да за сваки природан број n важе сљедеће једнакости:

1. $1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$;
2. $2+4+6+\ldots+2n = n(n+1)$.
3. $1+2^2+3^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;
4. $1+2^3+3^3+...+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$;
5. $1+2^4+3^4+...+n^4=\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$;
6. $1-2^2+3^2-4^2+...+(-1)^{n-1}n^2=(-1)^{n-1}\frac{n(n+1)}{2}$.

2. Доказати једнакости ($\forall n\in\mathbf{N}$):

1. $1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+...+n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$;
2. $1\cdot4+2\cdot7+3\cdot10+...+n(3n+1)=n(n+1)^2$;
3. $1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+3\cdot4\cdot5+...+n(n+1)(n+2)=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$;
4. $\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdot...\cdot\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{n+1}{2n}$;
5. $\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+...+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$;
6. $\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\frac{1}{5\cdot7}+...+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}$.

3. Доказати ($\forall n\in\mathbf{N}$):

1. $n^3 > n^2 + 5$, за $n \geq 3$;
2. $2^n > 2n + 1$, за $n \geq 3$;
3. $2^n > n^2$, за $n \geq 5$;
4. $2^n > n^3$, за $n \geq 10$;
5. $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}}\geq\sqrt{n}$, за $n \geq 1$;
6. $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot...\cdot\frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{\sqrt{3n+1}}$, за $n \geq 2$.

4. Доказати Бернулијеву неједнакост ($h\in\mathbf{R}$, $h > -1$, $n\in\mathbf{N}$):

$(1+h)^n \geq 1+nh$.

5. Доказати да је за природан број $n \geq 3$ збир свих унутрашњих углова конвексног n-то угла једнак $(n-2)\pi$.

6. Доказати да је $a_n = 2^n + 1$, када је $a_{n+1} = 3a_n - 2a_{n-1}$, $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$ и $a_1 = 3$, $a_2 = 5$.

7. Доказати да је збир кубова три сусједна природна броја дјељив бројем 9.

8. Доказати да је $f(n)$ за $n = 1, 2, \ldots$ дјељиво бројем p ако је:

1. $f(n) = n^3 + 5n$, $p = 6$;
2. $f(n) = 5^n + 2^{n+1}$, $p = 3$;
3. $f(n) = 6^n - 5n + 4$, $p = 5$;
4. $f(n) = n(n+2)(25n^2 - 1)$, $p = 24$;
5. $f(n) = n(n+1)(2n + 1)$, $p = 6$;
6. $f(n) = 9^{n+1} + 2^{6n+1}$, $p = 11$.

9. Ако је $n \in \mathbf{N}$ показати сљедеће једнакости:

1. $\cos\left(\frac{4n+1}{2}\pi + x\right) = -\sin x$;
2. $\sin\left(\frac{4n+2}{2}\pi + x\right) = -\sin x$;
3. $\cos\left(\frac{4n+3}{2}\pi + x\right) = \sin x$;
4. $\sin x + \sin 3x + \ldots + \sin(2n-1)x = \frac{\sin^2 nx}{\sin x}$;
5. $\cos x + \cos 3x + \ldots + \cos(2n-1)x = \frac{\sin 2nx}{2\sin x}$.

Регресивном индукцијом се низ тврђења доказује на сљедећи начин.

i. Докаже се да је T_n тачно за бесконачно много природних бројева n.
ii. Докаже се импликација $T_n \Rightarrow T_{n-1}$.

Зашто је онда T_n тачно за свако поједино $n_0 \in \mathbf{N}$? Зато што увијек постоје бројеви већи од n_0 за које је тврђење тачно, па се корак по корак, враћањем импликацијама (ii), увијек може доказати тврђење Tn_0.

Примјер 24.1.16.
Доказати неједнакост аритметичке и геометријске ($A \geq G$) средине, тј.

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n},$$

гдје су $a_1, a_2, \ldots, a_n$ позитивни реални бројеви ($n \in \mathbf{N}$).

Доказ: За $n = 2$, то је $\frac{a_1 + a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 a_2}$, еквивалентно са $\left(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2}\right)^2 \geq 0$, што је тачно.

Друго, ако је дата неједнакост тачна за неко $n \in \mathbf{N}$, она је тачна и за $2n$. Наиме,

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{2n}}{2n} = \frac{1}{2}\left(\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} + \frac{a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{2n}}{n}\right),$$

па ако на сабирке $A_1 = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$ и $A_2 = \frac{a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + A_{2n}}{n}$ примјенимо доказану неједнакост $\frac{A_1 + A_2}{2} \geq \sqrt{A_1 A_2}$ добијамо

$$\frac{1}{2}\left(\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} + \frac{a_{n+1} + \ldots + a_{2n}}{n}\right) \geq \sqrt{\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} \cdot \frac{a_{n+1} + \ldots + a_{2n}}{n}}\ .$$

Међутим, на основу претпоставке је

$$\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \ldots a_n} \quad \text{и} \quad \frac{a_{n+1} + \ldots + a_{2n}}{n} \geq \sqrt[n]{a_{n+1} \ldots a_{2n}}\ ,$$

те је

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{2n}}{2n} \geq \sqrt[2n]{a_1 a_2 \ldots a_{2n}}\ .$$

Закључујемо да је дата неједнакост тачна за све природне бројеве 2, 4, 8, 16, ..., тј. за све бројеве облика $n = 2^m$ ($m \in \mathbf{N}$).

Даље, претпоставимо опет да је дата једнакост тачна за неко $n \in \mathbf{N}$. Ставимо

$$a_n = \frac{1}{n-1}(a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1})\,.$$

Тада је, редом

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}}{n-1}}{n} \geq \sqrt{a_1 a_2 \ldots a_{n-1} \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}}{n-1}}\ ,$$

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}}{n-1} \geq (a_1 a_2 \ldots a_{n-1})^{\frac{1}{n}} \left(\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}}{n-1}\right)^{\frac{1}{n}},$$

$$\left(\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}}{n-1}\right)^{1-\frac{1}{n}} \geq (a_1 a_2 \ldots a_{n-1})^{\frac{1}{n}},$$

и коначно

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}}{n-1} \geq \sqrt[n-1]{a_1 a_2 \ldots a_{n-1}}\ .$$

Дакле, из тачности дате неједнакости за неко n слиједи њена тачност за $n - 1$. Како је дата неједнакост тачна за све природне бројеве облика 2^m ($m \in \mathbf{N}$), на основу методе регресивне индукције закључујемо да је дата неједнакост тачна за свако $n \in \mathbf{N}$. ♦

Индуктивна дефиниција низа (математичких) објеката даје се са

$$A_{n+1} = f(A_1, A_2, \ldots, A_n),\ n \in \mathbf{N}.$$

Примјер 24.1.16. (Фибоначијев низ)
Један од најстаријих познатих индуктивно дефинисаних низова је (*Fibonacci*):

0, 1, 1, 2, 3, 5, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ... ,

Који (в. 26.2.7. примјер 1.) се може дефинисати са

$$F_0 = 0,\ F_1 = 1,\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2}.\ \blacklozenge$$

25. Основни низови

У најопштијем случају, у математици је **низ** уређена листа објеката, које називамо **чланови**, или елементи низа. Подразумјевамо да низ има од три до бесконачно чланова.

Низ реалних бројева је свака функција $a : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$. Број $a(n)$, тј. a_n је n-ти члан низа. Представљамо га са неколико његових, првих чланова и општим чланом:

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots .$$

Такође, можемо писати (a_n), или $\{a_n\}$.

Примјетимо да низ $\{a_n\}$ није исто што и скуп $\{ a_n : n \in \mathbf{N}\}$, јер сваки члан низа има тачно одређено мјесто на којем се налази, што са елементима скупа није случај. Са друге стране, ако се елементи понављају, скуп остаје исти, док се низ мјења.

Задатак 25.0.1.
Написати општи члан низа:

1. $1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots$;
2. $\frac{1}{3}, \frac{4}{5}, \frac{9}{7}, \frac{16}{9}, \ldots$;
3. $0, \frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{4}{5}, \frac{1}{6}, \ldots$;
4. $2, 4, 6, 8, 8, 8, 8, \ldots$.

Монотоно растући је низ којем је сваки следећи члан већи од претходног, као што је низ (2.) датог задатка чији је општи члан $a_n = \dfrac{n^2}{2n+1}$. Када кажемо да је низ (само) растући то значи да следећи члан може бити једнаки или већи од претходног, као што је низ (4.) истог примјера, чији је општи члан

$$a_n = \begin{cases} 2n, & n \le 3, \\ 8, & n \ge 4. \end{cases}$$

Сваки монотоно растући низ је и растући, такође је и неопадајући. Слично, користимо израз **монотоно опадајући** низ за онај чији су чланови стално све мањи бројеви, односно опадајући ако следећи члан може бити мањи или једнак претходном.

25.1. Аритметички низ

Аритметички низ, или аритметичка прогресија, је низ реалних бројева

$$(a_n) = (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots)$$

код којега је **разлика** било која два сусједна (узастопна) члана константна.

Према томе, код аритметичког низа постоји реалан број d који називамо **разлика** (диференција) низа, такав да је $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = \ldots = a_n - a_{n-1} = d$. Друго, аритметички низ је потпуно одређен својим првим чланом a_1 и разликом d, јер из

$$a_2 - a_1 = d,$$
$$a_3 - a_2 = d,$$
$$\ldots$$
$$a_n - a_{n-1} = d,$$

сабирањем, након поништавања слиједи $a_n - a_1 = (n-1)d$, тј.

$$a_n = a_1 + (n-1)d.$$

Примјетимо да је сваки члан низа (осим првог и посљедњег) **аритметичка средина** свог претходника и сљедбеника, тј.

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}.$$

Због наведених особина, аритметички низ се може писати и у облику

$$a_1,\ a_1+d,\ a_1+2d,\ a_1+3d,\ \ldots,\ a_1+(n-1)d,\ \ldots .$$

Из написаног се види да је аритметички низ одређен када су позната два његова члана. Збир првих n чланова аритметичког низа је

$$\begin{aligned} Sn &= a_1 + a_2 + a3 + \ldots + a_n = \\ &= a_1 + (a_1+d) + (a_1+2d) + \ldots + [a_1+(n-1)d] \\ &= na_1 + [1 + 2 + \ldots + (n-1)]d. \end{aligned}$$

Ако збир узастопних природних бројева означимо са z_n, имамо

$$z_n = 1 + 2 + \ldots + (n-1),$$
$$z_n = (n-1) + (n-2) + \ldots + 1,$$

што сабирањем даје

$$2z_n = n + n + \ldots + n, \text{ тј. } z_n = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Отуда

$$S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d \text{, тј.}$$

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d], \text{ односно } S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n).$$

Примјер 25.1.1.
Четврти члан аритметичког низа је 7, а дванаести 3. Одредити девети члан и збир првих 50 чланова тог низа.

Рјешење: Дато је $a_4 = 7$ и $a_{12} = 3$. Отуда систем $a_1 + 3d = 7$, $a_1 + 11d = 3$, из којег одузимањем налазимо $8d = -4$, тј. $d = -0{,}5$. Затим, увртавањем у (произвољну) полазну једначину, добијамо $a_1 = 8{,}5$. Према томе, аритметички низ је

$$8{,}5;\ 8{,}0;\ 7{,}5;\ 7{,}0;\ \ldots\ ;\ a_n = 8{,}5 - (n-1)\cdot 0{,}5;\ \ldots\ .$$

Збир првих 50 чланова овога низа је

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d] = \frac{50}{2}[2\cdot 8{,}5 - (50-1)\cdot 0{,}5] = -7{,}5.\blacklozenge$$

Задаци 25.1.2.

1. Израчунати a_1 и d у низу ако је дато:

а) $a_n = 21$, $S_n = 105$, $n = 7$; **б)** $a_n = 105$, $S_n = 840$, $n = 16$.

2. Израчунати n и S_n у аритметичком низу за који је:

а) $a_1 = 4$, $d = 5$, $a_n = 49$; **б)** $a_1 = 14{,}5$; $d = 0{,}7$; $a_n = 32$.

3. Израчунати n и a_n у аритметичкој прогресији за коју је:

а) $a_1 = 41$, $d = 2$, $S_n = 4784$; **б)** $a_1 = 2$, $d = 5$, $S_n = 245$.

4. Одредити аритметички низ за који је:

а) $5a_1 + 10a_5 = 0 \wedge S_4 = 14$; **б)** $S_2 - S_4 + a_2 = 1 \wedge S_3 + a_3 = 17$.

5. Збир прва три члана аритметичког низа је 36, а збир квадрата прва три члана је 482. Одредити низ.

6. Колико чланова аритметичког низа 5, 9, 13, 17, ... треба сабрати да би се добио збир 10877?

7. Ако су бројеви a, b, c узастопни чланови аритметичке прогресије, доказати да су онда то и изрази $a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$, $b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)$, $c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$.

8. Показати да квадрати полинома $x^2 - 2x - 1$, $x^2 + 1$, $x^2 + 2x - 1$ образују аритметички низ.

25.1. Геометријски низ

За низ реалних бројева $(a_n) = (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots)$ кажемо да је **геометријски** ако је **количник** било која два узастопна члана тог низа константан број.

Из $\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ слиједи $a_n = \sqrt{a_{n-1}\cdot a_{n+1}}$, тј. сваки члан геометријског низа (осим крајњих) је **геометријска средина** свог претходника и сљедбеника.

Дакле, дати низ је геометријски ако је

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = ... = \frac{a_{n+1}}{a_n} = q.$$

Број q се назива **количник** геометријског низа.

Лако провјеравамо да је **општи члан** овог низа, изражен помоћу количника:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \ (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Збир првих n чланова геометријског низа

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n,$$

исто је што

$$S_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \ldots + a_1q^{n-1}.$$

Отуда

$$qS_n = a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \ldots + a_1q^n.$$

Одузимањем налазимо

$$(1 - q)S_n = a_1 - a_1q^n,$$

тј. израз за збир првих n чланова геометријског низа:

$$S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}.$$

Примјетимо да се ова формула можеизвести помоћу математичке индукције.

Сљедећи примјери су узети из уџбеника: Јован Д. Кечкић, МАТЕМАТИКА са збирком задатака, за III разред средње школе, Научна књига, Београд, 1992.

Примјер 25.1.1.

Између бројева $a_1 = 14$ и $a_8 = -\frac{7}{64}$ уметнути шест бројева $a_2, \ldots, a_7$ тако да осам бројева $14, a_2, \ldots, a_7, -\frac{7}{64}$ чини геометријски низ. Наћи збир свих 8 чланова.

Рјешење: Из $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, дакле из $a_8 = a_1 \cdot q^7$, слиједи $-\frac{7}{64} = 14 \cdot q^7$, односно $q = -\frac{1}{2}$.

Тражени бројеви су $a_k = 14 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1}$, $k = 1, 2, \ldots, 8$, тј.

$$a_1 = 14,\ a_2 = -7,\ a_3 = +\frac{7}{2}, \ldots,\ a_7 = +\frac{7}{32},\ a_8 = -\frac{7}{64}.$$

Збир свих 8 чланова је $S_8 = 14 \cdot \frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^8}{1+\frac{1}{2}} = \frac{85}{128}$.

Примјетимо да између датих бројева (a_1 и a_8) не можемо уметнути, рецимо, пет бројева тако да чине седам узастопних чланова неког геометријског низа.♦

Задаци 25.1.2.

1. Наћи 3-члани геометријски низ чији збир је 31, а први члан је 1.

2. Доказати једнакост $\frac{1-\frac{1}{x}+x^n-x^{n+1}}{1+x+x^2+\ldots+x^n}=2-\left(x+\frac{1}{x}\right)$, где је $n\in\mathbf{N}$.

3. Доказати: ако је n природан број, тада је

$$\left(1+\frac{1}{a}\right)^{-1}+\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}\right)^{-1}+\ldots+\left(\frac{1}{a^{n-1}}+\frac{1}{a^n}\right)^{-1}=\frac{a(a^n-1)}{a^2-1}.$$

4. Нека су (a_n) и (b_n) геометријски низови за које важи: $a_1 = b_1$, $a_3 = b_5$. Доказати да је $(\forall n\in\mathbf{N})\ a_{n+1} = b_{2n+1}$.

5. Ако је S_n збир првих n чланова геометријског низа са првим чланом a и количником q, израчунати збир $S_1 + S_2 + S_3 + \ldots + S_{2n-1}$.

6. Ако је аритметичка средина позитивних бројева a и b два пута већа од њихове геометријске средине, доказати да је $\frac{a}{b}=\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$.

7. Између бројева 160 и 5 уметнути бројеве a, b, c, d тако да са дата два чине шест узастопних чланова геометријског низа.

8. Рјешити једначину по x: $1+a+a^2+\ldots+a^x=(1+a)(1+a^2)(1+a^4)(1+a^8)$.

9. Одредити позитивне бројеве a и b тако да су a, $a + 2b$, $2a + b$ узастопни чланови аритметичког низа, док су $(b + 1)^2$, $ab + 5$, $(a + 1)^2$ узастопни чланови геометријског низа.

10. Нека је p-ти члан геометријског низа означен словом a, q-ти члан словом b, а r-ти члан словом c. Доказати једнакост $a^{q-r}b^{r-p}c^{p-q} = 1$.

26. Диференцне једначине

До потребе за рјешавањем диференцних једначина можемо доћи тражећи општи члан неког нумеричког низа, али и приликом одређивања детерминанти вишег реда, степена марице, или приликом израчунавања интеграла.

Нека је $(a_n)_{n\in N}$ низ реалних (комплексних) бројева и нека је F функција $k + 2$ аргумената гдје је k природан број. Једначина

$$F(n, a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{n+k}) = 0$$

је **диференцна једначина** реда k.

Рјешење ове једначине је сваки низ (a_n) чијом замјеном у једначину она постаје идентитет. **Опште рјешење** је оно које садржи сва рјешења. Само неке диференцне једанчине се могу рјешити, а овдје ћемо обрадити само линеарне.

Једначина облика[3]

26.0.1. $$f_k(n)a_{n+k} + f_{k-1}(n)a_{n+k-1} + ... + f_1(n)a_{n+1} + f_0 a_n = F(n)$$

је линеарна диференцна једначина реда k, при чему су коефицијенти $f_j(n)$, $j = 0, \ldots, k$, функције од n, а $F(n)$ је слободан члан и такође функција од n. Ако је $F(n) = 0$ тада горња једначина постаје хомогена линеарна диференцна једначина реда k.

Теорема 26.0.2.
Опште рјешење једначине (26.0.1.) садржи k константи.

Доказ: Претпоставимо да се једначина (26.1.1.) може написати у облику

26.0.2. $$a_{n+k} = f(n, a_n, a_{n+1}, ..., a_{n+k-1}).$$

За $n = 1, 2, \ldots$, редом, према (26.1.3.) слиједи:

$$a_{k+1} = f(1, a_1, ..., a_k) = \varphi_0(a_1, ..., a_k),$$

гдје су $a_1, \ldots, a_k$ произвољне константе; затим

$$\begin{aligned} a_{k+2} &= f(2, a_2, ..., a_k, a_{k+1}) \\ &= f(2, a_2, ..., a_k, f(1, a_1, ..., a_k) \\ &= \varphi_1(a_1, ..., a_k). \end{aligned}$$

За $n = 3$ слиједи

$$\begin{aligned} a_{k+3} &= f(3, a_3, ..., a_{k+1}, a_{k+2}) \\ &= f(3, a_3, ..., \varphi_0(a_1, ..., a_k), \varphi_1(a_1, ..., a_k)) \\ &= \varphi_2(a_1, ..., a_k). \end{aligned}$$

На тај начин налазимо да је

$$a_{k+m} = \varphi_{m-1}(a_1, ..., a_k).$$

Можемо рећи да је управо a_{k+m} опште рјешење једначине (26.0.2.), гдје су $a_1, \ldots, a_k$ произвољне константе. ♦

26.1. Линеарна првог реда

Једначина облика

26.1.1. $$a_{n+1} + f(n)a_n = g(n),$$

[3] Програм Природно-математичког факултета, Универзитета у Нишу, Србија, 2008.

је **диференцна једначина првог реда**, при чему су коефицијенти $f(n)$ и $g(n)$ функције од n, док је a_n непозната.

Диференцну једначину првог реда рјешавамо тако да прво рјешавамо једначине

i. $a_{n+1} - a_n = g(n)$,
ii. $a_{n+1} + f(n)a_n = 0$.

За $n = 1, 2 \ldots$ редом, у првој (i) сљеде једнакости

$$a_2 - a_1 = g(1)$$
$$a_3 - a_2 = g(2)$$
$$\ldots$$
$$a_n - a_{n-1} = g(n\text{-}1).$$

Сабирањем ових једнакости налазимо опште рјешење једначине (i):

$$a_n = a_1 + \sum_{j=1}^{n-1} g(j)\text{, тј. } a_n = C + \sum_{j=1}^{n-1} g(j),$$

гдје је $a_1 = C$ произвољна константа.

На исти начин, за $n = 1, 2 \ldots$ редом, у другој (ii) налазимо:

$$a_2 + f(1)a_1 = 0,\ a_2 = -f(1)a_1,$$
$$a_3 + f(2)a_2 = 0,\ a_3 = (-1)^2 f(1)f(2)a_1,$$
$$\ldots$$
$$a_n + f(n\text{-}1)a_{n-1} = 0,\ a_n = (-1)^{n-1} f(1)f(2)\ldots f(n\text{-}1)a_1.$$

Према томе, опште рјешење једначине (ii) је

$$a_n = (-1)^{n-1} a_1 \prod_{\nu=1}^{n-1} f(\nu)\text{, тј. } a_n = (-1)^{n-1} C \prod_{\nu=1}^{n-1} f(\nu).$$

Нека је $a_n = u_n \cdot v_n$ рјешење диференцне једначине (26.1.1.), тада је

$$u_{n+1}.v_{n+1} + f(n)\cdot u_n \cdot v_n = g(n),$$
$$u_{n+1}.v_{n+1} - u_n \cdot v_{n+1} + u_n \cdot v_{n+1} + f(n)\cdot u_n \cdot v_n = g(n),$$
$$v_{n+1}(u_{n+1} - u_n) + u_n(v_{n+1} + f(n)\cdot v_n) = g(n).$$

Посљедња једначина је неодређена, јер садржи двије непознате, u_n и v_n. Једно рјешење се може узети произвољно, рецимо $v_{n+1} + f(n)v_n = 0$. Тада се иста једначина разлаже на систем диференцних једачина

$$v_{n+1} + f(n)v_n = 0$$
$$v_{n+1}(u_{n+1} - u_n) = g(n).$$

Прва једначина овог система је управо (ii), са рјешењем $a_n = (-1)^{n-1} C \prod_{\nu=1}^{n-1} f(\nu)$.

Друга једначина овог система се може написати у облику

$$u_{n+1} - u_n = \frac{g(n)}{v_{n+1}},$$

одакле слиједи

$$u_n = u_1 + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{g(j)}{v_{j+1}},$$

односно

$$u_n = D + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{g(j)}{(-1)^j C \prod_{\nu=1}^{j} f(\nu)}.$$

Опште рјешење диференцне једначине (26.1.1.) је

$$a_n = u_n \cdot v_n = (-1)^{n-1} \prod_{\nu=1}^{n-1} f(\nu) \left(C_1 + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{g(j)}{(-1)^j \prod_{\nu=1}^{j} f(\nu)} \right),$$

гдје је $C_1 = C \cdot D$.

Примјери 26.1.2.

1. Наћи опште рјешење диференцне једначине $a_{n+1} - a_n = d$, гдје је d произвољна константа.

Рјешење: Сабирањем једнакости

$$a_2 - a_1 = d$$
$$a_3 - a_2 = d$$
$$\dots$$
$$a_n - a_1 = d$$

налазимо опште рјешење $a_n = C + (n\text{-}1)d$. То су чланови аритметичког низа са диференцијом d.♦

2. Наћи рјешење диференцне једначине $a_{n+1} - a_n = n$, ако је $a_1 = 1$.

Р: Сабирањем једнакости

$$a_2 - a_1 = 1$$
$$a_3 - a_2 = 2$$
$$\dots$$
$$a_n - a_{n\text{-}1} = n - 1$$

добијамо $a_n = 1 + \frac{n(n-1)}{2}$.♦

3. Рјешити диференцну једначину $a_{n+1} - a_n = 2^n$, ако је $a_1 = 2$.

Р: $a_n - a_1 = 2 + 2^2 + \dots + 2^{n\text{-}1}$, $a_n = 2 + 2 \cdot \frac{1 - 2^{n-1}}{1-2} = 2^n$.♦

4. Наћи рјешење диференцне једначине $a_{n+1} - 2a_n = 0$, за $a_1 = 2$.

Р: $a_2 = 2a_1$,
$a_3 = 2\cdot a_2 = 2^2 a_1$,
$a_4 = 2\cdot a_3 = 2^3 a_1$,
…
$a_n = 2^{n-1} a_1 = 2^n$. ♦

5. Рјешити диференцну једначину $a_{n+1} + na_n = 1$.

Р: То је потпуна диференцна једначина првог реда (26.1.1.), гдје је $f(n) = n$, $g(n) = 1$. Опште рјешење ове једначине је

$$a_n = (-1)^{n-1}\prod_{\nu=1}^{n-1}\nu\left(C + \sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{(-1)^j\prod_{\nu=1}^{j}\nu}\right)$$
$$= (-1)^{n-1}(n-1)!\left(C + \sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{(-1)^j\cdot j!}\right).\blacklozenge$$

26.2. Једначина са константним коефицијентима

Ако су коефицијенти $f_k(n)$ у општој линеарној диференцној једначини (26.0.1.) константе, онда је називамо **линеарна диференцна једначина** реда k **са константним коефицијентима**. Означимо ли коефицијенте са b_k, биће

26.2.1. $$b_k a_{n+k} + b_{k-1}a_{n+k-1} + \ldots + b_1 a_{n+1} + b_0 a_n = F(n)$$

линеарна диференцна једначина реда k са константним коефицијентима. Одговарајућа **хомогена диференцна једначина** је

26.2.2. $$b_k a_{n+k} + b_{k-1}a_{n+k-1} + \ldots + b_1 a_{n+1} + b_0 a_n = 0$$

Размотримо прву једначину (6.) за $k = 2$ и $k = 3$. Нека је

26.2.3. $$b_2 a_{n+2} + b_1 a_{n+1} + b_0 a_n = F(n)$$

диференцна једначина реда два са константним коефицијентима, а одговарајућа хомогена једначина је

26.2.4. $$b_2 a_{n+2} + b_1 a_{n+1} + b_0 a_n = 0$$

Теорема 26.2.5.
Ако су a'_n и a''_n линеарно независна рјешења хомогене једначине (26.2.4.), тада је

$$a_n = C_1 a'_n + C_2 a''_n$$

опште рјешење те једначине.

Доказ: Замјеном у једначину, слиједи

$$b_2(C_1a'_{n+2}+C_2a''_{n+2})+b_1(C_1a'_{n+1}+C_2a''_{n+1})+b_0(C_1a'_n+C_2a''_n)=0,$$
$$C_1(b_2a'_{n+2}+b_1a'_{n+1}+b_0a'_n)+C_2(b_2a''_{n+2}+b_1a''_{n+1}+b_0a''_n)=0,$$
$$C_1\cdot 0+C_2\cdot 0=0.$$

Рјешење хомогене једначине (26.1.9.) тражимо у облику $a_n=\lambda^n$. Отуда је

$$b_2\lambda^{n+2}+b_1\lambda^{n+1}+b_0\lambda^n=0,$$

одакле је

$$b_2\lambda^2+b_1\lambda+b_0=0.$$

Ова квадратна једначина се назива **карактеристична једначина** хомогене (26.2.4.). Рјешења карактеристичне једначине су

$$\lambda_{12}=\frac{-b_1\pm\sqrt{b_1^2-4b_2b_0}}{2b_2}.$$

Разликујемо три случаја.

1. Рјешења карактеристичне једначине су реална и различита. Тада је опште рјешење хомогене једначине дато са

$$a_n=C_1\lambda_1^n+C_2\lambda_2^n.$$

2. Рјешења карактеристичне једначине су реална и једнака, $\lambda_1=\lambda_2$. Није тешко доказати да је $\lambda_1\cdot n$ рјешење хомогене једначине и то независно од λ_1. Поново по теореми (26.1.9.), слиједи да је опште рјешење хомогене једначине дато са

$$a_n=C_1\lambda_1^n+C_2n\lambda_1^n=\lambda_1^n(C_1+C_2n).$$

3. Рјешења карактеристичне једначине су комплексна, тј.

$$\lambda_{12}=\alpha\pm i\beta\ =\ r(\cos\varphi\pm i\sin\varphi).$$

Тада је опште рјешење хомогене једначине (26.1.9.) дато са

$$\begin{aligned}a_n&=Cr^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)+Dr^n(\cos n\varphi-i\sin n\varphi)\\&=(Cr^n+Dr^n)\cos n\varphi+(Cir^n-Dr^ni)\sin n\varphi\\&=C_1\cos n\varphi+C_2\sin n\varphi,\end{aligned}$$
$$(C_1=Cr^n+Dr^n,\ C_2=Cir^n-Dir^n).$$

Теорема 26.2.6.
Рјешење нехомогене диференцне једначине (26.2.3.) је збир рјешења одговарајуће хомогене једначине (4) и произвољног рјешења нехомогене (3).

Доказ: Нека је a'_n опште рјешење хомогене једначине, а a''_n рјешење нехомогене. Тада је $a_n=a'_n+a''_n$ опште рјешење нехомогене једначине, јер је:

$$b_2(a'_{n+2}+a''_{n+2})+b_1(a'_{n+1}+a'_{n+1})+b_0(a'_n+a''_n)=F(n),\ \text{тј.}$$
$$(b_2a'_{n+2}+b_1a'_{n+1}+b_0a'_n)+(b_2a''_{n+2}+b_1a''_{n+1}+b_0a''_n)=F(n),$$
$$0+F(n)=F(n),$$

што је тачно.♦

Примјери 26.2.7.

1. Наћи општи члан Фибоначијевог низа $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, за $a_1 = a_2 = 1$.

Рјешење: Карактеристична једаначина је $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$, са рјешењима

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ и } \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Опште рјешење је

$$a_n = C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n,$$

Одакле и из $a_1 = a_2 = 1$ налазимо $C_{12} = \pm\frac{\sqrt{5}}{5}$, па је општи члан Фибоначијевог низа дат формулом

$$a_n = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.\blacklozenge$$

2. Наћи опште рјешење једначине $a_{n+2} + 2a_{n+1} + a_n = n + 2$.

Р: Карактеристична једначина је $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$. Њена рјешења су $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$. Опште рјешење одговарајуће хомогене једначине је

$$a'_n = C_1(-1)^n + C_2 n(-1)^n.$$

Рјешење a''_n полазне, нехомогене диференцне једначине је облика $a''_n = An + B$. Тада је

$$A(n + 2) + B + 2(A(n + 1) + B) + An + B = n + 2,$$

одакле слиједи $A = \frac{1}{4}$ и $B = \frac{1}{4}$. Дакле, $a''_n = \frac{1}{4}(n+1)$, а опште рјешење полазне једначине је

$$a_n = C_1(-1)^n + C_2 n(-1)^n + \frac{1}{4}(n+1).\blacklozenge$$

3. Одредити a_n ако је $a_{n+2} - a_{n+1} + a_n = 0$.

Р: Карактеристична једначина је $\lambda^2 - \lambda + 1 = 0$. Њена рјешења су $\lambda_{12} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$, односно у тригонометријском облику $\lambda_{12} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$. Опште рјешење једначине је $a_n = C_1\cos\frac{n\pi}{3} + C_2\sin\frac{n\pi}{3}.\blacklozenge$

4. Одредити рјешење диференцне једначине $a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n$, ако је:

1. $a_0 = 0$, $a_1 = 1$;
2. $a_0 = 2$, $a_1 = 1$.

Р: Рјешења карактеристичне једначине су $\lambda_1 = 2$ и $\lambda_2 = -1$. Опште рјешење је $a_n = C_1 \cdot 2^2 + C_2 \cdot (-1)^n$. Из почетних вриједности налазимо тражена рјешења:

1. $a_n = \frac{1}{3}(2^n - (-1)^n)$ - Јакобшталов (*Jacobsthal*) низ;
2. $a_n = 2^n + (-1)^n$ - Јакобштал-Лукасов (*Jacobsthal–Lucas*) низ. ♦

VIII Лимес низа

Око 5. вјека п.н.е. грчки филозоф Зенон је формулисао своје чувене парадоксе који су укључивали процесе са граничним вриједностима, лимесима. Затим су грчки филозофи Леукип, Демокрит, Антифонт, Еудокс и Архимед, до 2. вијека п.н.е. развили метод исцрпљивања (ексхаустије) за израчунавање површине фигуре убацивањем низа полигона чије површине конвергирају ка површини читаве фигуре.

Озбиљније разумјевање граничних вриједности, лимеса, почело је у 17. вијеку радовима Њутна (*Isaac Newton*, 1643 – 1727). У 18. вијеку Ојлер је парадоксално сумирао неке дивергентне редове, да би Лагранж 1797. год. схватио и објаснио важност ригорозности у разматрањима у вези са лимесима. Гаус је 1813. строгим дефиницијама по први пут у историји математике одредио услове конвергенције низова у граничним условима.

Савремену дефиницију лимеса (за свако $\varepsilon > 0$ постоји индекс n_0 послије којег ...) дао је чешки математичар Болцано (*Bernard Bolzano*, 1781 – 1848) у тада једва примјећеном раду: *Der binomische Lehrsatz*, Праг 1816. који је око 1870. прхватио њемачки математичар Вајерштрас (*Karl Theodor Wilhelm Weierstraß*, 1815 – 1897).

27. Реални низови

Видјели смо да је бесконачни **низ реалних бројева** функција $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, чији домен је скуп природних бројева $\mathbb{N}$, а кодомен скуп реалних бројева $\mathbb{R}$. Означавамо га са

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots \text{ или } (a_n).$$

Епсилон околина, тј. ***ε*-околина** реалног броја a је отворени интервал реалних бројева, од броја $a - \varepsilon$ до броја $a + \varepsilon$, тј. интервал $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, при чему је ε реалан позитиван број.

Број a је **тачка нагомилавања** низа реалних бројева (a_n) ако свака ε-околина броја a садржи бесконачно много чланова низа (a_n).

Реалан број A је **лимес**, или **гранична вриједност низа** реалних бројева (a_n), ако за сваки реалан број $\varepsilon > 0$ постоји природан број n_0 такав да

$$(n > n_0) \Rightarrow (|a_n - A| < \varepsilon).$$

Тада пишемо: $a_n \to A$, $n \to \infty$, или

$$A = \lim_{n \to \infty} a_n$$

и читамо: низ (a_n) тежи A када n тежи бесконачности.

Кажемо да је низ **конвергентан** ако има (тачно једну) граничну вриједност, тј. лимес, а у супротном случају да је **дивергентан.**

27.1. Конвергенција

Дефиниција 27.1.1.
Околина полупречника δ неке **тачке** (броја) α у бројној равнини, односно на бројној правој, је скуп бројева x за које вриједи:

$$|x - \alpha| < \delta. \blacklozenge$$

У бројној равни то је круг са центром у тачки α и полупречником δ. На бројној правој (у случају реалних бројева) то је отворени интервал $(\alpha - \delta, \alpha + \delta)$ дужине 2δ. На слици горе, на x-оси је приказана околина тачке $\alpha = 2$ полупречника $\delta = 2/3$.

Дефиниција 27.1.2.
Израз **скоро сви чланови низа** значи бесконачно много чланова низа с највише коначно много изузетака. ♦

На примјер, скоро сви чланови низа $a_n = 1/n$ су бројеви мањи од 0,01.

Став 27.1.3.
Ако се у тачки α не налази члан низа (a_n), нити је то тачка нагомилавања низа, онда постоји околина те тачке у којој нема чланова низа.

Доказ: Заиста, ако α није тачка нагомилаања, мора постојати њена околина у којој има највише коначно много чланова тог низа (иначе би у њеној околини било бесконачно много чланова низа, па би α била тачка нагомилавања). Ако у тој околини уопште нема чланова, немамо шта доказивати. Ако их има коначно много, сви они морају имати позитивну удаљеност од α, јер се ни један не налази у α. У коначном скупу тих позитивних бројева постоји минимум. Смањимо ли полупречник околине на тај минимум, добили смо околину у којој нема чланова низа. ♦

Дефиниција 27.1.4.
Низ (a_n) има **лимес**, или **границу** ако постоји тачка a таква да се у свакој њезиној околини налазе скоро сви чланови тог низа. ♦

Лимес је увијек и тачка нагомилавања низа, јер „скоро свих чланова“ има бесконачно много. Обратно не вриједи, низ нема граничну вриједност, ако има више тачака нагомилавања. На примјер, низ -1, +1, -1, +1, -1, +1, ... има двије тачке нагомилавања, бројеве ±1, и према томе нема (јединствен) лимес.

Став 27.1.5.
Ако је низ конвергентан, онда је лимес тога низа његова једина тачка нагомилавања.

Доказ: Заиста, ако низ (a_n) осим тачке a има још једну тачку нагомилавања b, могли бисмо одабрати једну околину прве и једну околину друге тачке, тако да те околине немају заједничких тачака, рецимо, ако узмемо $\delta = \frac{1}{2}|a-b|$. Тада би у околини тачке b било бесконачно много чланова низа, који би сви били изван околине тачке a. Дакле, за околину тачке a било би бесконачно много изузетака, па она не би могла бити лимес. ♦

Могућа је и другачија дефиниција конвергенције низа. Готово сви чланови низа значи исто што и сви чланови након одређеног. Дакле, ако одаберемо било коју околину полупречника $\varepsilon > 0$, могуће је наћи тако велики индекс n_0, такав да иза тог индекса (за свако $n > n_0$) сви чланови низа су унутар околине, тј. $|a - a_n| < \varepsilon$.

Дефиниција 27.1.6.
Низ (a_n) је конвергентан ако постоји број a (лимес) такав да за сваки позитиван број ε постоји природни број n_0 такав да за $n > n_0$ вриједи $|a - a_n| < \varepsilon$. Тада пишемо

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a\,.\blacklozenge$$

Што је мањи изабрани број ε то је мања околина броја a, па је више чланова низа изван околине. Другим рјечима, што је мањи изабрани број ε то је већи индекс n_0 од којег су сви следећи чланови низа унутар околине. Према томе, индекс n_0 зависи од избора ε, што се понекад наглашава писањем $n_0(\varepsilon)$, а читамо: „n_0 зависан од ε“, или краће: „n_0 од ε“.

Помоћу знакова алгебре логике, горња дефиниција је:

$$(\exists a \in \mathbf{R})(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbf{N})(n > n_0 \Rightarrow |a - a_n| < \varepsilon).$$

Дакле, низ (a_n) конвергира тачки a ако је претходна реченица тачна: „Постоји реалан број a, такав да за сваки позитиван број ε постоји индекс n_0 почев од којег су сви чланови низа удаљени од тог броја (a) за мање од ε“.

Низ који није конвергентан назива се **дивергентним**. Низ (реалних бројева) је **дивергентан у ужем смислу** ако чланови постају и остају већи од ма како великог природног броја, или ако постају и остају мањи од ма како апсолутно великог негативног цјелог броја. Ако је (реалан) низ дивергентан, али није дивергентан у ужем смислу, кажемо да је **дивергентан у ширем смислу**.

Став 27.1.7.
Ако је низ (a_n) конвергентан са лимесом a, онда је низ његових апсолутних вриједности $(|a_n|)$ такође конвергентан, са лимесом |a|.

Доказ: Рецимо да је за дати $\varepsilon > 0$ нађен n_0 такав да за $n > n_0$ вриједи $|a - a_n| < \varepsilon$. Онда због $|a| - |a_n| \le |a - a_n|$ и $|a_n| - |a| \le |a_n - a| = |a - a_n|$ вриједи

$$\| a | - | a_n \| \le | a - a_n | < \varepsilon ,$$

што значи $||a| - |a_n|| < \varepsilon$, тј. $|a_n| \to |a|$.♦

Обратно тврђење не важи, тј. низ апсолутних вриједности може конвергирати а да сам низ не конвергира, као на примјер (алтернативни) низ: +1, -1, +1, -1, ...

Низ са самим једнаким члановима назива се **константан** низ. Константан низ је (a), односно $a, a, a, \ldots$. **Нуланиз** је конвергентан низ са лимесом нула.

Примјери 27.1.8.

1. Показати да низ $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots$ тежи према 1.

Рјешење: За n-ти члан, разлика према 1 је $1 - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1} \to 0$, за $n \to \infty$, тј. та ће разлика (која је позитиван број) бити мања од ε рецимо за $n > \frac{1}{\varepsilon}$ јер је тада

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}+1} < \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon .$$

Дакле, пишемо $\frac{n}{n+1} \to 1$ или $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$.♦

2. Показати да је низ $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ нуланиз.

Р: Апсолутна вриједност разлике $\left| 0 - \frac{1}{n} \right| = \frac{1}{n}$ се може учинити мањом од ε ако је $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Према томе, како год узели мален позитиван број епсилон, разлика од нуле члана тог низа почев од неког биће мања од тог епсилон. Другим рјечима $\frac{1}{n} \to 0$, тј. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.♦

3. Наћи тачке нагомилавања низа: $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{4}{5}, \ldots$.

Р: Дати низ (a_n) одређен је формулама $a_{2k-1} = \frac{1}{k+1}$, $a_{2k} = \frac{k}{k+1}$. Према томе, он има двије тачке нагомилавања, бројеве 0 и 1. Низ не конвергира, јер има двије тачке нагомилавања.♦

4. Показати да је низ $\frac{1}{2}$; 0,9; $\frac{2}{3}$; 0,99; $\frac{3}{4}$; 0,999; $\frac{4}{5}$; 0,9999; … конвергентан.

Р: Чланови овог низа су одређени формулама $a_{2k-1}=\frac{k}{k+1}=1-\frac{1}{k+1}$, $a_{2k}=1-\frac{1}{10^k}$. Да би сви чланови тога низа били у некој околини, нпр. за $\varepsilon=10^{-3}$, ту морају бити чланови и са непарним и са парним индексима. То ће се за чланове са непарним идексима десити за $\frac{1}{k+1}<10^{-3}$, дакле $k+1>10^3$, тј. $k>999$, односно за $n=2k-1>1997$. За чланове за парним индеском је тада поготову услов испуњен, јер се они много брже приближавају лимесу. Према томе, дати низ има само једну тачку нагомилавања, те је конвергентан. ♦

5. Показати да низ 1; 0,9; 2; 0,99; 3; 0,999; 4; 0,9999; 5; … није конвергентан.

Р: Чланови низа су дати са $a_{2k-1}=k$, $a_{2k}=1-\frac{1}{10^k}$. Већ од 8. Члана, разлика између парних и непарних постаје 10^{-4} и и даље стално расте. За нпр. $\varepsilon=10^{-3}$, ова разлика не постаје мања од ε, па иако је 1 тачка нагомилавања (парних чланова) низа, нема лимеса и низ није конвергентан. ♦

Задаци 27.1.9.

1. Доказати једнакости:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n-1}{3n+1}=\frac{2}{3}$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^3+1}=0$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}3^n=\infty$;

г) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}=0$;

д) $\lim\limits_{n\to\infty}(1-n)=-\infty$;

ђ) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{n^2}{n-1}\right)=-\infty$.

2. Доказати да низ $a_n=\frac{n}{2n+1}\cos\frac{2n\pi}{3}$ има двије тачке нагомилавања $-\frac{1}{4}$ и $\frac{1}{2}$.

3. доказати да низ $((-1)^n n^2)$ има двије тачке нагомилавања $-\infty$ и $+\infty$.

4. Доказати да је $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$, за $a>1$.

5. Нека су (a_n) и (b_n) нуланизови и c реалан број. Доказати да су и (ca_n), (a_nb_n), (a_n+b_n) нуланизови.

6. Да би било $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, неопходно је и довољно да је низ (a_n-a) нуланиз. Доказати.

27.2. Ограниченост

Дефиниција 27.2.1.

Реалан (и комплексан) низ (a_n) је ограничен ако за све чланове вриједи $|a_n|\le M$, гдје је M позитиван реалан број. ♦

Другим рјечима, низ је ограничен ако $(\exists M \in \mathbf{R})(\forall n \in \mathbf{N})(|a_n| \le M)$, што читамо: „постоји реалан број M такав да за сваки природни број n члан низа a_n је мањи или једнак M“.

Оваква дефиниција (1.) важи и за реалне и за комплексне бројеве. Посебно, за реалне бројеве, уобичајено ју је замјенити следећом.

Дефиниција 27.2.2.
Реални низ (a_n) је ограничен ако постоји интервал $[m, M]$ такав, да за све чланове вриједи:

$$m \le a_n \le M,$$

тј. сви чланови низа су унутар интервала, укључујући и руб интервала. Број m називамо **доња граница**, а број M **горња граница** низа.♦

Став 27.2.3.
Ограничен низ има бар једну тачку нагомилавања.♦

Сљеди Болцано-Вајерштрасова теорема, коју коју овдје не доказујемо (в. 28.3.10.).

За реалне бројеве, обе дефиниције (1.) и (2.) су еквивалентне. Заиста, ако вриједи (1.) онда вриједи и (2.) јер постоји тражени интервал, наиме $[-M, M]$. Обратно, ако вриједи (2.) и ако је $\delta = \max\{|m|, |M|\}$, онда је $-\delta \le m \le M \le \delta$, тј. сигурно је $|a_n| \le \delta$, па су испуњени услови (1.).

Ако је m доња граница реалног низа и $m_1 < m$, онда је и m_1 доња граница низа. Такође, ако је M горња граница реалног низа и $M_1 > M$, онда је и M_1 горња граница. Другим рјечима, сваки број мањи (већи) од доње (горње) границе такође је доња (горња) граница датог низа.

Међу доњим границама реалног низа (a_n), ако их има, постоји највећа која се зове **инфимум**, или највећа доња граница (енг. *greatest lower bound*) и означава са $\inf a_n$. Међу горњим границама реалног низа (a_n), ако их има, постоји најмања која се назива **супремум**, или најмања горња граница (енг. *least upper bound*) и означава $\sup a_n$.

У ограниченом реалном низу (a_n) постоји најмања тачка нагомилавања која се назива лимес инфериор и означава $\liminf a_n$, или $\underline{\lim}\, a_n$. Такође, постоји највећа тачка нагомилавања која се назива **лимес супериор** и означава $\limsup a_n$, или $\overline{\lim}\, a_n$. За реалне низове вриједе неједнакости:

$$\inf a_n \le \underline{\lim}\, a_n \le \overline{\lim}\, a_n \le \sup a_n .$$

Ако реалан низ има максимум, тј. члан који је већи или једнак свим другим члановима низа, онда је тај максимум уједно супремум низа. Слично вриједи за минимум, ако постоји, уједно инфимум низа.

Ако низ има супремум, али нема максимум, тј. ако супремум није члан низа, онда је тај супремум тачка нагомилавања низа. Слично, ако низ има инфимум, али нема минимума, инфимум је тачка нагомилавања низа.

Став 27.2.4.
Конвергентан низ је ограничен.

Доказ: Из $|a - a_n| < \varepsilon$ за сваки $n > n_0$, слиједи $|a_n| = |a_n - a + a| \leq |a_n - a| + |a| < \varepsilon + |a|$, па је парцијални низ a_{n0+1}, a_{n0+2}, a_{n0+3}, … ограничен. Дио a_1, a_2, a_3, …, a_{n0} је ограничен јер има само коначно много чланова, па је и цјели низ оганичен. ♦

Став 27.2.5.
Ако ограничен низ има само једну тачку нагомилавања, он је конвергентан и та тачка му је лимес.

Доказ: Наиме, ако поменута тачка нагомилавања T није лимес, онда постоји његова околина O у којој се не налазе скоро сви чланови низа, што значи да има бесконачно много чланова низа изван ње. Ти чланови су подниз датог низа који према ставу (3.) има бар једну тачку нагомилавања. Међутим, та тачка не може бити T, јер у околини O од T нема ни једног члана поменутог подниза. ♦

Међутим, неограничен низ може имати тачку нагомилавања, а да није конвергентан, као на примјер низ $\frac{1}{2}$, 2, $\frac{1}{3}$, 3, $\frac{1}{4}$, 4, … који има тачку нагомилавања нула, али је дивергентан.

Став 27.2.6.
Низ је конвергентан онда и само онда ако је ограничен и нема више од једне тачке нагомилавања. ♦

Помоћу сљедећих, општих Кошијевих принципа конвергенције не тражи се конвергенција низа из егзистенције неког броја (лимеса), већ помоћу особина самих чланова низа.

Принцип 27.2.7.
Низ a_n је онда и само онда конвергентан ако се за сваки (ма како мален) позитиван број ε може наћи (довољно велик) природан број n_0, тако да за сваки индекс $n > n_0$ и сваки природни број r вриједи $|a_{n+r} - a_n| < \varepsilon$.

То исто се може изрећи и овако $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbf{N})(\forall r \in \mathbf{N})(n > n_0 \Rightarrow |a_{n+r} - a_n| < \varepsilon)$.

Друга варијанта Кошијевог принципа је следећа.

Принцип 27.2.8.
Низ a_n је конвергентан онда и само онда, ако се за сваки позитивни ε може наћи природан број n_0 такав да за свака два природна броја $m > n_0$ и $n > n_0$ важи

$$|a_m - a_n| < \varepsilon.$$

Дакле, ма како мален позитиван ε изабрали, може се у низу ићи тако далеко да од неког члана даље разлика било која два члана буде апсолутно мања од ε.

Исто писано логичким знацима:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbf{N})(\forall m,n \in \mathbf{N})(m > n \wedge n > n_0 \Rightarrow |a_m - a_n| < \varepsilon).$$

Сада ћемо доказати да су обе варијанте Кошијевог принципа (7.) и (8.) еквивалентне, затим да су ти услови еквивалентни са дефиницијом конвергенције (27.1.6.), што значи да саме принципе у овом контексту сматрамо и теоремама.

Докази: Прво, доказујемо да су варијанте (7.) и (8.) еквивалентне. Ако вриједе услови из (8.) онда вриједе и услви из (7.). Заиста, можемо узети $m > n$ без ограничења општости. Ако је наиме $m = n$ тврђење $|a_m - a_n| < \varepsilon$ је очигледно. Ако је $m < n$ можемо замјенити улоге бројева m и n, јер је $|a_m - a_n| = |a_n - a_m|$. Дакле узимамо да је $m > n$, тј. $m = n + r$, гдје је r неки природан број, па видимо да је испуњен услов (7.).

Затим, доказујемо ови услови еквивалентни с дефиницијом конвергенције (27.1.6.). Заиста, ако вриједе поменути услови конвергенције, онда ће бити, за $m > n$, $n > n_0$,

$$|a_m - a_n| = |(a - a_n) - (a - a_m)| \le |a - a_n| + |a - a_m| < 2\varepsilon.$$

Задамо ли било који позитиван η па одаберемо $\varepsilon = \eta/2$, излази да постоји број n_0 такав да за $m > n_0$ и $n > n_0$ буде $|a_m - a_n| < \eta$, односно услов конвергенције.

Обрнути закључак је нешто тежи. Нека је испуњен услов (8.). Лако се види да је тада низ сигурно ограничен. Заиста, за $m = n_1 = n_0 + 1$ и $n > n_1$ вриједи $|a_{n1} - a_n| < \varepsilon$, тј. сви чланови послије a_{n1} налазе се у околини полупречника ε око броја a_{n1}. Према томе, парцијални низ a_{n1+1}, a_{n1+2}, a_{n1+3}, … је ограничен, а пошто је слог a_1, a_2, …, a_{n1} такође ограничен (јер је коначан), и цјели низ a_1, a_2, … је ограничен.

Због ограничености, низ има сигурно бар једну тачку нагомилавања. Докажемо ли још да их не може имати двије, онда је низ конвергентан. Претпоставимо дакле да низ има двије тачке нагомилавања a и b. Одредимо двије дисјунктне околине тих тачака бирајући полупречник $\delta = \frac{1}{3}|a - b|$. Двије поменуте тачке, једна у једној околини, друга у другој, морају имати удаљеност већу од δ. Руб се не убраја у околину. Аналитички гледамо овако. За тачку c у околини тачке a, биће $|c - a| < \delta$. Даље, за тачку d у околини тачке b, биће $|b - d| < \delta$. Пишемо ли $3\delta = |b - a| =$

$$= |(b - d) + (d - c)| + (c - a)| \le$$
$$\le |b - d| + |d - c| + |c - a| <$$

$$< \delta + |d - c| + \delta =$$
$$= 2\delta + |d - c|,$$

онда излази

(*) $$|d - c| > \delta,$$

тј. удаљеност тачака c и d већа је од δ.

Претпоставимо сада да вриједи услов (8.) и бирајмо, рецимо, $\varepsilon = \delta$. Онда мора постојати број n_0 такав да за свака два од њега већа природна броја m и n вриједи

$$|a_m - a_n| < \varepsilon = \delta.$$

У околини O_a броја a има бесконачно много чланова низа. До индекса n_0 их има само коначно много. Дакле, у околини O_a мора бити чланова са индексом већим од n_0. Рецимо, да је a_m такав члан у O_a с индексом $m > n_0$. Међутим, у околини O_b броја b бесконачно много чланова. До индекса m има само коначно много чланова. Дакле, мора у околини O_b бити чланова с иднексом $n > m$. Нека је a_n такав члан. Онда је

(**) $$|a_m - a_n| > \delta$$

јер су то по једна тачка из поменутих околина с удаљеношћу већом од δ. Али, требало је да вриједи (*), јер је $m > n_0$ и због $n > m$ такође $n > n_0$. То је контрадикција, ради које низ не може имати двије тачке нагомилавања. Тиме је Кошијев принцип (27.2.8.) доказан. ♦

Дефиниција 27.2.9.
Реални низ $a_1, a_2, a_3, \ldots$ називамо растући (узлазни), или **монотоно растући**, ако вриједи

$$a_1 \le a_2 \le a_3 \le \ldots ,$$

или краће

$$a_n \le a_{n+1}, \text{ за } n = 1, 2, 3, \ldots .$$

Реални низ $a_1, a_2, a_3, \ldots$ називамо опадајући (силазни), или **монотоно опадајући**, ако вриједи

$$a_1 \ge a_2 \ge a_3 \ge \ldots ,$$

или краће

$$a_n \ge a_{n+1}, \text{ за } n = 1, 2, 3, \ldots .♦$$

Ако је низ растући (узлазан), или ако је опадајући (силазан), кажемо да је **монотон**. Низ је **строго растући**, или **строго опадајући**, ако су искључени знакови једанкости, тј. ако вриједи

$$a_n < a_{n+1}, \text{ односно } a_n > a_{n+1}, (\forall n \in \mathbf{N}).$$

Став 27.2.10.
Монотон низ је ограничен, или дивергира у ужем смислу.

Доказ: Рецимо, ако је низ растући, он је свакако ограничен одоздо, јер му је први члан доња граница и то инфимум. Ако има горњу ограду он је дакле ограничен. Ако је нема, онда како год био велик број M задали, постоје још већи чланови, а

сви идући чланови су још већи. Тиме је испуњен услов дивергенције у ужем смислу. За силазне низове, разматрање је аналогно.♦

Став 27.2.11.
Монотон ограничен низ је конвергентан.

Доказ: Рецимо да је монотон ограничен низ узлазан. Тада постоји његов супремум. У свакој околини тога супремума има чланова низа. Заиста, ако у некој околини супремума не би било чланова низа, тада би доњи руб те околине био горња граница тог низа, па средиште те околине не би било супремум, тј. најмања горња ограда. Али ако у некој околини супремума има бар један члан низа, онда су због узлазности чланова и сви даљни чланови у тој околини, тј. скоро сви чланови низа. Дакле, у свакој су околини скоро сви чланови низа, тј. супремум је уједно лимес низа и низ је конвергентан. Сличан је доказ за силазне ограничене низове.♦

Са претходна два става смо доказали сљедеће теореме.

Теорема 27.2.12.
Монотон је низ конвергентан ако и само ако је ограничен.♦

Теорема 27.2.13.
Чланови растућег (опадајућег) конвергентног низа нису већи (мањи) од његовог лимеса.♦

Посљедња теорема је очигледна јер је лимес растућег низа супремум, а опадајућег инфимум.

27.3. Особине

Ако низ (a_n) није нуланиз, али јесте конвергентан са лимесом a, онда постоји нуланиз $p_n = a - a_n$ такав да је $a_n = a + p_n$.

Ако сваки члан конвергентног низа (a_n) са лимесом a множимо истим бројем, константом c, резултат је такође конвергентан низ (ca_n) са лимесом ca. Другим рјечима,

$$\lim (ca_n) = c \lim a_n.$$

Наиме, из $a_n = a + p_n$ слиједи $c \cdot a_n = c \cdot a + c \cdot p_n$, гдје је (p_n) неки нуланиз. Како је и $(c \cdot p_n)$ нуланиз, то $ca_n \to ca$.

На сличан начин доказујемо и следеће аритметичке особине конвергентних низова.

Став 27.3.1.
Лимес збира, односно разлике два конвергентна низа једнак је збиру, односно разлици њихових лимеса, тј.

$$(\lim_{n\to\infty} a_n = a \wedge \lim_{n\to\infty} b_n = b) \Rightarrow \lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = a \pm b.$$

Доказ: Изразимо оба низа као збир константе и нулаиза, дакле $a_n = a + p_n$ и $b_n = b + q_n$. Отуда $a_n \pm b_n = a \pm b + (p_n \pm q_n)$, гдје је збир (разлика) у загради нулаиз. Према томе, $a_n \pm b_n \to a \pm b$, тј. $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = a \pm b$. ♦

Из конвергенције низова (a_n) и (b_n) слиједи конвергенција њиховог збира (разлике), али не и обратно. На примјер, ако је $a_n = -n + \frac{1}{n}$ и $b_n = n$. Први низ је $0, -\frac{3}{2}, -\frac{8}{3}, -\frac{15}{4}$, ... и он очигледно дивергира у ужем смислу, као што дивергира и други низ. Њихов збир $a_n + b_n = \frac{1}{n}$ је конвергентан низ.

Међутим, има један посебан случај када важи и обрат горњег става (27.2.1), а то је када је први низ реалан, а други (чисто) имагинаран.

Став 27.3.2.
Из $a_n \to a$ и $b_n \to b$, гдје су (a_n) и (b_n) реални низови, произилази $a_n + ib_n \to a + ib$ и обрнуто.

Доказ: Очигледно је да из $b_n \to b$ слиједи $ib_n \to ib$, јер је са $b_n - b$ и $ib_n - ib$ нулаиз. Заиста, $|ib_n - ib| = |i|\cdot|b_n - b| = |b_n - b|$. Да важи и обрат, видимо из

$$|a_n + ib_n - (a + ib)| = |a_n - a + i(b_n - b)| = \sqrt{(a_n - a)^2 + (b_n - b)^2}\ .$$

Због

$$(a_n - a)^2 \le (a_n - a)^2 + (b_n - b)^2$$

биће

$$|a_n - a| = \sqrt{(a_n - a)^2}\ \le \sqrt{(a_n - a)^2 + (b_n - b)^2}\ = |a_n - a + i(b_n - b)|,$$

па је $a_n - a$ сигурно нулаиз, ако је $a_n - a + i(b_n - b)$ нулаиз. Аналогно закључивање важи и за $b_n - b$. ♦

Став 27.3.3.
Лимес производа два конвергентна низа једнак је производу њихових лимеса, тј.

$$(\lim_{n\to\infty} a_n = a \ \wedge\ \lim_{n\to\infty} b_n = b) \Rightarrow \lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = ab\,.$$

Доказ: Изразимо факторе као збир константе и нулаиза. Излази

$$a_n b_n = (a + p_n)(b + q_n) = ab + ap_n + bq_n + p_n qn.$$

Резултат се састоји из константе ab и нулаиза, јер су p_n и qn нулаизови. Према томе $a_n b_n \to ab$, што је и требало доказати. ♦

Став 27.3.4.
Ако је (b_n) конвергентан низ са члановима који су различити од нуле и са лимесом b различитим од нуле, онда је низ $(1/b_n)$ ограничен. Низ $(1/b_n)$ је конвергентан, а лимес му је $1/b$.

Доказ: Лимес b је једина тачка нагомилавања, а није једнак нули, па онда постоји околина нуле с неким полупречником δ у којој нема чланова b_n, тј. вриједи $|b_n| \geq \delta$, дакле $|1/b_n| \leq \delta$, тј. низ $(1/b_n)$ је ограничен.

Даље, из $\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} = (b - b_n)\frac{1}{b}\frac{1}{b_n} \to 0$, јер нуланиз у загради помножен коначним бројевима (разломцима) даје нуланиз. Дакле, на лијевој страни једнакости је нуланиз, тј. $\frac{1}{b_n} \to \frac{1}{b}$. ♦

Став 27.3.5.
Ако је (a_n) конвергентан низ с лимесом a и (b_n) конвергентан низ чији су сви чланови различити од нуле и чији лимес је b различит од нуле, онда низ количник (a_n/b_n) има лимес (a/b).

Краће, лимес количника једнак је количнику лимеса, ако се у називникуне појављује нула.

Доказ: Коефицијент $\frac{a_n}{b_n}$ можемо писати као производ $a_n \cdot \frac{1}{b_n}$. Први фактор тежи a, а други према $\frac{1}{b}$, дакле производ према $a \cdot \frac{1}{b}$, тј. $\frac{a}{b}$. Према томе $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}$, или другачије писано $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$. ♦

Ако нису сви чланови низа у називнику различити од нуле, онда их сигурно има само коначно много, иначе би нула била тачка нагомилавања, што није. Тада се низ (a_n/b_n) може посматрати од неком члана надаље, гдје више нема чланова низа у називнику који су једнаки нули. Теорем онда вриједи и за такав низ.

Обратно, из конвергенције количника не слиједи конвергенција бројника и називника. Нпр. $a_n = n$, $b_n = n^2$ су дивергентни низови, док је низ њихов количник $a_n/b_n = n/n^2 = 1/n$ конвергентан. Осим тога, количник може (али не мора) конвергирати и онда када су оба, лимеси бројника и називника нуле. Ако напротив, лимес бројника није нула, а лимес називника јесте, низ количник је неограничен.

Примјери 27.3.6.
Користећи аримтетичке особине низова, наћи лимес низа са општим чланом:

1. $a_n = \frac{n^2 + n - 1}{2n^2 + 1}$;
2. $a_n = \sqrt{n^2 - 5n + 6} - n$;

3. $a_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + ... + \frac{n}{3^n}$.

Рјешења: **1.** $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+n-1}{2n^2+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n^2+n-1)/n^2}{(2n^2+1)/n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}{2+\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2}$, јер су

$1/n$ и $1/n^2$ нуланизови.

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-5n+6}-n\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\left(\sqrt{n^2-5n+6}-n\right)\cdot\frac{\sqrt{n^2-5n+6}+n}{\sqrt{n^2-5n+6}+n}\right) =$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n^2-5n+6)-n^2}{\sqrt{n^2-5n+6}+n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-5n+6)/n}{\left(\sqrt{n^2-5n+6}+n\right)/n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{-5+\frac{6}{n}}{\sqrt{1-\frac{5}{n}+\frac{6}{n^2}}+1} = -\frac{5}{2}$, јер

$\frac{1}{n} \to 0$ и поготово $\frac{1}{n^2} \to 0$.

3. Из $\frac{1}{3}a_n - a_n = \left(\frac{1}{3^2}+\frac{2}{3^2}+...+\frac{n}{3^{n+1}}\right) - \left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+...+\frac{n}{3^n}\right) =$

$-\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3^2}-\frac{2}{3^2}\right)+\left(\frac{2}{3^2}-\frac{3}{3^2}\right)+...+\left(\frac{n-1}{3^n}-\frac{n}{3^n}\right)+\frac{n}{3^{n+1}}$ слиједи

$-\frac{2}{3}a_n = -\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{3^n}\right)+\frac{n}{3^{n+1}} = -S_n + \frac{n}{3^{n+1}}$. У загради је S_n, збир геометријског

низа, тј. $S_n = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)$. Према томе, $-\frac{2}{3}a_n = -\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)+\frac{n}{3^{n+1}}$, а отуда

$a_n = \frac{3}{4}\left(1-\frac{1}{3^n}\right) - \frac{n}{2\cdot 3^n}$, па је $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3}{4}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)-\frac{n}{2\cdot 3^n}\right) = \frac{3}{4}$. ♦

Задаци 27.3.7.

1. Израчунати:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n^2-2n+1}{-2n^2+3n+4}$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{-5n^3+n-1}{2n^3-5n+3}$.

2. Одредити лимес низа чији је општи члан:

а) $a_n = \sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}$;

б) $a_n = \sqrt[3]{(n+1)^2} - \sqrt[3]{(n-1)^2}$.

3. Наћи граничну вриједност низа:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n-1}{2^n+1}$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^{\frac{1}{n}}-1}{2^{\frac{1}{n}}+1}$.

4. Наћи лимесе:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+\ldots+n}{n^2}$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2-1}+\dfrac{2}{n^2-1}+\ldots+\dfrac{n-1}{n^2-1}\right)$.

5. Израчунати:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{49}-\ldots+\dfrac{(-1)^{n-1}}{7^{n-1}}\right)$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+5+5^2+\ldots+5^{n-1}}{1-25^n}$.

6. Израчунати:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{4}\right)\left(1-\dfrac{1}{9}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\dfrac{1}{n(n+1)}\right)$.

27.4. Број e

Бернулијеву неједнакост (24.1.15. задатак 4.) у облику

$$(1+h)^n \geq 1+nh \text{ , за } h\in\mathbf{R},\ h > -1,\ n\in\mathbf{N}$$

смо доказивали потпуном индукцијом. Међутим, иста једнакост важи и за све реалне експоненте који су већи од 1. Њену општу сљедећу формулацију наводимо без доказа.

Бернулијева неједнакост 27.4.1.

Нека су h и ν два реална броја која испуњавају услове

$$0 \neq h > -1, \text{ тј. } 1 \neq h + 1 > 0, \text{ и } \nu > 1.$$

Онда вриједи

$$(1 + h)^{\nu} > 1 + \nu h. \blacklozenge$$

Став 27.4.2.

Низ $e_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ је строго растући.

Доказ: У Бернулијевој неједнакости (27.4.1.) ставимо $h = \dfrac{1}{k+1}$, $\nu = \dfrac{n+1}{n}$, добијамо

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{n}} > 1+\frac{1}{n+1}\cdot\frac{n+1}{n} = 1+\frac{1}{n}.$$

Степеновање са n даје

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{n}\right)^n,$$

тј.

$$e_{n+1} > e_n,$$

што је и требало доказати. ♦

Став 27.4.3.

Низ $e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ је ограничен.

Доказ: Обзиром да је низ растући, треба само показати постојање горње границе. Примјењујући Бернулијеву једначину са $h = 1,\ \nu = 1+\frac{2}{n}$, слиједи

$$4^{\frac{1}{n}} = 2^{\frac{2}{n}} = 2^{-1}\cdot 2^{1+\frac{2}{n}} = \frac{1}{2}(1+1)^{1+\frac{2}{n}} > \frac{1}{2}\left[1+1\cdot\left(1+\frac{2}{n}\right)\right] = 1+\frac{1}{n}.$$

Степеновањем са n добијамо

$$4 > \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e_n,$$

тј. број 4 је горња граница низа e_n.♦

Из узлазности и ограђености излази конвергенција, тако да важи сљедећи став.

Став 27.4.4.

Низ $e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ је конвергентан. Лимес му је број који се означава са e.♦

Број e = 2, 71828 18284 59045 23536 02874 71352... је веома важан у математичкој анализи. То је ирационалан број, штавише, Шарл Ермит (*Charles Hermite*, 1822—1901) је (1873) доказао да је број e трансцендентан, тј. да он није корјен алгебарске једначине с рационалним коефицијентима.

Примјер 27.4.5.

Помоћу Бернулијеве неједнакости, показати да за реалне бројеве $0 < a < b$ вриједи:

$$\left(1+\frac{1}{b}\right)^b > \left(1+\frac{1}{a}\right)^a.$$

Рјешење: У Бернулијевој неједнакости ставимо $h = \frac{1}{b},\ \nu = \frac{b}{a}$. Имамо да је $\nu > 1$, јер је $b > a > 0$, па је

$$\left(1+\frac{1}{b}\right)^{\frac{b}{a}} > 1+\frac{1}{b}\cdot\frac{b}{a} = 1+\frac{1}{a},$$

а степеновање са a даје тражену неједнакост.♦

Примјер 27.4.6.

Наћи граничну вриједност $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n+2}{2n-1}\right)^n$.

Рјешење: Бројник растављамо на $2n - 1$ и 3 :

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n-1+3}{2n-1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{2n-1}\right)^n =$$

уводимо смјену $\frac{1}{t}=\frac{3}{2n-1}\to 0$, гдје $t=\frac{2n-1}{3}\to\infty$ и $n=\frac{3t+1}{2}=\frac{3}{2}t+\frac{1}{2}$, па је даље

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right]^{\frac{3}{2}}\cdot\left(1+\frac{1}{t}\right)^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{3}{2}}.\blacklozenge$$

Задаци 27.4.7.

1. Наћи сљедеће граничне вриједности:

а) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{3n}$; **б)** $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3n}\right)^{n}$.

2. Израчунати:

а) $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n}\right)^{n}$; **б)** $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{2n}$.

3. Наћи лимесе:

а) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n-1}\right)^{n}$; **б)** $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+1}{n^2-1}\right)^{n^2}$.

4. Одредити:

а) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n-2}{3n+1}\right)^{2n}$; **б)** $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{2n+3}\right)^{3n}$.

5. Одредити лимес инфериор и лимес супериор, ако је:

а) $a_n=n^{(-1)^n}$; **б)** $a_n=\frac{2n-1}{2n+1}\sin\frac{2n\pi}{3}$;

в) $a_n=-n(2+(-1)^n)$; **г)** $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n(-1)^n+\cos\frac{n\pi}{4}$.

27.5. Геометријски ред

Нека је a_n (n = 0, 1, 2, …) **низ** реалних (или комплексних) бројева. Симболичка ознака формалног бесконачног сабирања чланова овог низа

$$\sum_{n=0}^{+\infty}a_n \text{ , или } a_0+a_1+a_2+\ldots ,$$

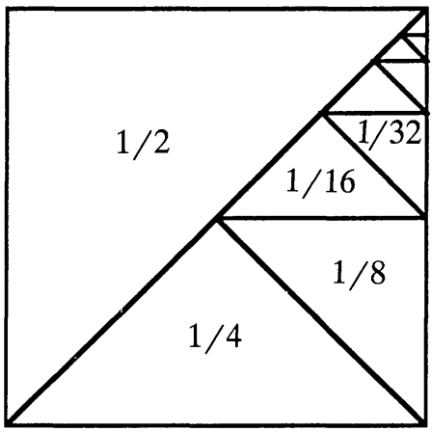
назива се бројним (нумеричким) **редом**. По дефиницији је ***n*-ти члан** реда уједно и n-ти члан низа.

Ако **низ парцијалних збирова** (сума) $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ датог бројног реда конвергира ка (коначној) граници S, кажемо да дати **ред конвергира**, или да је конвергентан. Ако бројни ред не конвергира, кажемо да **дивергира**, или да је дивергентан.

Број $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$ датог реда назива се његовим n-тим **остатком**.

Примјери 27.5.1.
1. $1/3 = 0{,}3 + 0{,}03 + 0{,}003 + 0{,}0003 + \ldots$.

2. Подјелимо квадрат странице 1 на пола дијагоналом, затим једну од половина подјелимо на пола, сљедећу добијену половину на пола, и тако даље без престанка, као на слици десно.



Површина квадрата је збир површина свих дјелова, што води до бесконачног збира

$$1 = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} + \ldots .$$

3. Конвергира и збир

$$1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\ldots =$$
$$1+\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\ldots = 2.$$

4. Међутим, сљедећи, тзв. **хармонијски ред**, дивергира

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots .$$

Наиме, формирајмо групе по 2, 4, 8, ... сабирака

$$\frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4} > \frac{1}{4}+\frac{1}{4}$$
$$\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8} > \frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}$$
$$\ldots$$

Збир свих разломака на лијевим странама неједначина већи је од збира свих разломака на десној страни, а сабирањем лијевих добијамо хармонијски ред. Са друге стране, свака од десних страна неједнакости има укупну вриједност ½, а таквих имамо бесконачно много. Према томе, збир хармонијског реда је не мањи од бесконачно, тј. ред је дивергентан.♦

Геометријски ред, за $a, q \in \mathbf{R}$:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} aq^k = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^n + \ldots$$

је конвергентан ако и само ако је његов количник $|q| < 1$, и његов збир је тада

$$S = \frac{a}{1-q}.$$

Наиме парцијална сума геометријског реда је збир првих чланова геометријског низа $S_n = \sum_{k=0}^{n} aq^k = a \cdot \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \to \frac{a}{1-q}$, када $n \to \infty$.

Архимедова акисома каже да за $x > 0$ и y произвољан реалан број, постоји природан број n такав да је

$$nx > y.$$

Једна од посљедица Архимедове аксиоме је могућност записа реалног броја помоћу (бесконачног) низа децимала, коју ћемо сада доказати.

Децимални запис 27.5.2.
Примјетимо да постоји тачно један цјели број c такав да је

(1) $$c \le x < c + 1.$$

Исто тако, за реалан број $10(x - c)$ постоји цјели број d_1 такав да је

(2) $$\begin{aligned} d_1 \le 10(x-c) < d_1 + 1, \\ c + \frac{d_1}{10} \le x < c + \frac{d_1+1}{10}. \end{aligned}$$

При томе је $0 \le d_1 \le 9$. Заиста, нека је $d_1 > 9$ (тј. $d_1 \ge 10$). Тада лијева неједнакост (2) даје

$$x \ge c + \frac{d_1}{10} \ge c + \frac{10}{10} = c + 1,$$

што је у супротности са десном неједнакошћу (1). Слично, ако је $d_1 < 0$ (тј. $d_1 \le -1$) тада на основу десне неједнакости (2) имамо

$$x < c + \frac{d_1+1}{10} \le c + \frac{-1+1}{10} = c,$$

што је у супротности са лијевом једнакошћу (1). Како је d_1 цјели број, то он мора бити један од бројева 0, 1, ..., 9.

Даље, за реалан број $10^2\left(x - c - \frac{d_1}{10}\right)$ постоји цјели број d_2 такав да је

$$d_2 \le 10^2\left(x - c - \frac{d_1}{10}\right) < d_2 + 1, \text{ тј.}$$

$$c + \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{10^2} \le x < c + \frac{d_1}{10} + \frac{d_2+1}{10^2},$$

при чему је опет $0 \le d_2 \le 9$, што се доказује слично као за претходни случај.

Настављајући, налазимо да постоје цијели бројеви c, d_1, d_2, …, d_n, … гдје је $0 \le d_k \le 9$, такви да је

$$c + \frac{d_1}{10} + \ldots + \frac{d_n}{10^n} \le x < c + \frac{d_1}{10} + \ldots + \frac{d_n+1}{10^n}.$$

Тиме су дефинисана два низа рационалних бројева (a_n) и (b_n), границе x у претходном изразу.

Како је $a_{n+1} - a_n = \frac{d_{n+1}}{10^{n+1}} \ge 0$ биће $a_{n+1} \ge a_n$ па је низ (a_n) опадајући. Он је и ограничен одозго бројем $c + 1$ па постоји $\lim_{n\to\infty} a_n$. Слично, имамо $b_{n+1} - b_n =$ $\frac{d_{n+1}+1}{10^{n+1}} + \frac{d_n}{10^n} - \frac{d_n+1}{10^n} = \frac{d_{n+1}-9}{10^{n+1}} \le 0$ јер је $d_{n+1} \le 9$ па је низ (b_n) нерастући. Он је такође ограничен одозго бројем c, па постоји $\lim_{n\to\infty} b_n$.

Међутим, $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{10^n} = 0$, паје $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$. Како за свако $n \in \mathbf{N}$ важи $a_n \le x < b_n$, закључујемо $\lim_{n\to\infty} a_n \le x \le \lim_{n\to\infty} b_n$, тј. $x = \lim_{n\to\infty} a_n$.

Према томе је $x = c + \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{10^2} + \ldots = c + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{d_k}{10^k}$. ♦

Из наведеног разматрања слиједи могућност децималног развоја, тј. **децималног записа** реалног броја x. Број с назива се **цијели дио** броја x, тј. $c = [x]$, а цифра d_n (од 0 до 9) је n-та децимала броја x. Као што нам је познато, број x у децималном запису означавамо са $x = c, d_1 d_2 \ldots d_n \ldots$.

Посебно, сваки реалан број r између 0 и 1 ($0 < r < 1$) може се представити у децималном облику

$$r = 0, d_1 d_2 d_3 \ldots,$$

гдје је $d_k \in \{0,1,\ldots,9\}$ за свако $k = 1, 2, 3, \ldots$. Ако је он **рационалан број**, он је облика $\frac{p}{q}$ гдје су бројник (p) и називник (q) природни бројеви и $p < q$, јер је по претпоставци $r < 1$. Децимални запис броја $r = \frac{p}{q}$ може се добити директним дјељењем бројника називником. Ако су сви d_n за $n > k$ једнаки 0, те се нуле обично

не пишу и кажемо да број r има коначан децимални развој. На примјер $\frac{1}{4} = 0{,}2500...$ пишемо 0,25.

Претпоставимо да рационалан број $r = \frac{p}{q}$ **нема коначан** децималан развој. Тада дјељењем бројника називником сваки остатак мора бити различит од нуле, дакле мора бити број између 1 и $q - 1$. Дакле, има највише $q - 1$ могућност за вриједност остатка, што значи да ће се након највише q деоба неки остатак k појавити по други пут. Међутим, тада ће се на том мјесту дјељења сваки пут појављивати исти остатци.

Према томе, децимални развој било којег рационалног броја је периодичан, тј. након неке позиције се једна (нпр. нула) или низ цифара стално понавља бесконачно много пута. Број, или групу бројева која се даље стално понавља овдје пишемо у загради.

На примјер, непосредним дјељењем налазимо:

$\frac{1}{6} = 0{,}16(6)...$, $\frac{1}{7} = 0{,}142857(142857)...$, $\frac{1}{8} = 0{,}1250(0)\ldots$, $\frac{1}{11} = 0{,}09(09)\ldots$

Обрнуто, ако је децимални развој неког реалног броја **периодичан**, тај број је рационалан. Заиста, општи (број из интервала од 0 до 1) периодични број има облик

$$r = 0, a_1 a_2 ... a_m b_1 b_2 ... b_n b_1 b_2 ... b_n ... \ ,$$

гдје се група $b_1 b_2 ... b_n$ појављује бесконачно много пута. Ако ставимо $B = 0, b_1 b_2 ... b_n$ тада је очигледно $B = \frac{b_1 b_2 ... b_n}{10^n}$ рационалан број. Међутим, тада је

$$r = 0, a_1 a_2 ... a_m + \frac{B}{10^n}\left(1 + \frac{1}{10^n} + \frac{1}{10^{2n}} + ...\right).$$

Израз у загради је геометријски ред са количником $q = \frac{1}{10^n}$, па је његов збир

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{10^n}} = \frac{10^n}{10^n - 1}.$$

Отуда

$$r = \frac{a_1 a_2 ... a_m}{10^m} + \frac{10^n B}{10^m (10^n - 1)} = \frac{a_1 a_2 ... a_m}{10^m} + \frac{b_1 b_2 ... b_n}{10^m (10^n - 1)},$$

а то је рационалан број.

На примјер, ако је $r = 0{,}42323\ldots$, тада је $m = 1$, $n = 2$, $a_1 = 4$, $b_1 = 2$, $b_2 = 3$ и имамо

$$r = \frac{4}{10} + \frac{23}{10(10^2 - 1)} = \frac{4}{10} + \frac{23}{990} = \frac{419}{990}.$$

Примјер 27.5.3.
Представити у облику разломка децималне бројеве
а) 0,12(12)... ; **б**) 0,123(123)... ; **в**) 3,409(09)... .

Рјешења: **а**) Ставимо $B = 0{,}1212...$. Множимо једнакост са 100, добијамо $100B = 12{,}1212\ldots$, тј. $100B = 12 + B$. Отуда је $99B = 12$, тј. $B = \frac{12}{99} = \frac{4}{33}$. **б**) Ставимо x = 0,123123... и множимо са 1000. Добијамо $1000x = 123{,}123123\ldots$, тј. $1000x = 123 + x$, а отуда $x = \frac{123}{999} = \frac{41}{333}$. **в**) Ставимо $x = a + \frac{b}{10}$, гдје су $a = 3{,}4$ и $b = 0{,}0909...$.

Множимо другу са 100 и добијамо 100b = 9 + *b*, тј. 99b = 9, односно $b = \frac{1}{11}$. Затим, израчунавамо $x = 3{,}4 + \frac{1}{110} = \frac{34 \cdot 11}{10 \cdot 11} + \frac{1}{110} = \frac{375}{110} = \frac{75}{22}$. ♦

Геометријски ред можемо наћи и у другачијим примјенама.

Примјер 27.5.4.
Дат је једнакостраничан троугао странице *a*. Спајањем средина његових страница добија се други једнакостранични троугао, а спајањем средина страница другог добија се трећи, и тако даље без краја. Наћи збир: **а**) обима; **б**) површина; свих тако насталих троуглова.

Рјешење: **а**) Обим *n*-тог троугла је $O_n = \frac{3a}{2^{n-1}}$, гдје $n \in \mathbf{N}$. Збир свих ових обима је збир конвергентног геометријског реда $S = 3a + \frac{3a}{2} + \frac{3a}{2^2} + ... = 3a \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 6a$, јер је количник овог реда q = $\frac{1}{2}$ мањи од један. **б**) Површина *n*-тог троугла је $P_n = \frac{a_n^2 \sqrt{3}}{4} = \left(\frac{a}{2^{n-1}}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4^n}$, $n \in \mathbf{N}$. Збир свих ових површина је збир конвергентног геометријског реда $P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{a^2\sqrt{3}}{4^2} + \frac{a^2\sqrt{3}}{4^3} + ... = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{3}$, јер је количник одговарајућег геометријског низа ¼, број мањи од 1. ♦

Задаци 27.5.5.
1. Израчунати збир првих *n*, а затим свих чланова геометријског низа:
а) $\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{8}, ...$; **б**) $\sqrt{\frac{2}{3}}, 1, \sqrt{\frac{3}{2}}, ...$.

2. Наћи збир $T_n = a + \overline{aa} + ... + \underbrace{\overline{aa...a}}_{n}$, гдје је a једна цифра.

3. Наћи бесконачни збир:

а) $2 + \frac{2}{5} + \frac{2}{25} + ... + \frac{2}{5^{n-1}} + ...$; **б)** $3 - \frac{3}{2} + \frac{3}{4} + ... + \frac{(-1)^{n-1} \cdot 3}{2^{n-1}} + ...$.

4. Показати да је:

1) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ... = 3 - \frac{3}{2} + \frac{3}{4} - \frac{3}{8} + ...$;

2) $1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{8}{27} + ... = 2\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + ...\right)$.

5. Наћи први члан геометријског реда ако је његов збир 4, а количник је $\frac{1}{3}$.

6. Наћи количник геометријског реда ако је његов збир 6, а први члан је 8.

7. Претворити у обичне разломке:

а) 0,78(78)... ; **б)** 0,36(36)... ; **в)** 1,023(23)... ; **г)** 0,5245(45)... .

8. Наћи $\lim\limits_{n\to\infty} \underbrace{\sqrt{2\sqrt{2...\sqrt{2}}}}_{n}$.

9. Дат је квадрат странице a. Средине његових страница спојене дужима чине други квадрат. То исто је учињено са другим квадратом и добијен је трећи, итд. без краја. Наћи збир **а**) обима; **б**) површина; свих тако добијених квадрата.

10. На једном краку оштрог угла α дата је дуж a. Ова дуж се пројектује на други крак, добијена пројекција се пројектује на први крак, итд. без краја. Колика је укупна дужина свих тако добијених дужи?

28. Комплексни бројеви

Када излазимо из оквира скупа реалних бројева, уобичајено је прво примјетити да је квадрат реалног броја ненегативан реалан број, тј. $(\forall x \in \mathbb{R})\ x^2 \geq 0$. Зато једначина

$$x^2 + 1 = 0$$

нема рјешења у скупу **реалних бројева**. Међутим, ако скуп реалних бројева ($\mathbb{R}$) проширимо „бројем“ који ће рјешити наведену једначину, тзв. **имагинарном јединицом** $i = \sqrt{-1}$, доћи ћемо до скупа **комплексних бројева** ($\mathbb{C}$) унутар којег ће бити могуће наћи рјешења не само дате, већ сваке **алгебарске једначине**, тј. једначине облика

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0,$$

гдје су коефицијенти a_n, a_{n-1}, …, a_1, a_0 реални, или комплексни бројеви.

28.1. Алгебарска структура

Као што нам је познато из II разреда средње школе, дефинишемо број

$$i = \sqrt{-1},$$

који називамо **имагинарна јединица**, затим формирамо изразе облика

$$z = x + iy, \text{ гдје } x, y \in \mathbb{R},$$

које називамо **комплексни бројеви**. Скуп комплексних бројева означавамо $\mathbb{C}$.

Скуп комплексних бројева $\mathbb{C}$ је и скуп уређених парова реалних бројева, односно

$$\mathbb{C} = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Први у пару се назива **реални дио**, а други је **имагинарни дио** датог комплексног броја. Другим рјечима, реални и имагинарни дио броја $z = x + iy$ су

$$\mathrm{Re}(z) = x, \quad \mathrm{Im}(z) = y,$$

и оба су реални бројеви.

Обзиром на основне особине уређеног пара, из ове дефиниције непосредно слиједи да су комплекснии бројеви једнаки ако и само ако су им једнаки и реални и имагинарни дјелови. У скупу C операције **сабирања** (+) и **множења** (·) помоћу сљедећих једнакости:

$$(x, y) + (u, v) = (x + u, y + v),$$
$$(x, y)\cdot(u, v) = (xu - yv, xv + yu).$$

То је у складу са другим начином писања истог:

$$(x + iy) + (u + iv) = (x + u) + i(y + v),$$
$$(x + iy)\cdot(u + iv) = (xu - yv) + i(xv + yu).$$

Према томе је ($\mathbb{C}$, +) је **комутативна група**:

i. $z + w = w + z$,
ii. $z + (w + t) = (z + w) + t$,
iii. $z + (0, 0) = z$.

Комплексни број (0, 0) је неутралан у односу на операију сабирања (iii) и пишемо га краће 0. Стављамо да је $z = (x, y)$ произвољан комплексан број. Питамо се да ли постоји комплексан број $w = (u, v)$ такав да је $z + w = 0$, тј. њему (броју z) супротан број. Из дефиниције сабирања, имамо

$$(x, y) + (u, v) = (0, 0), \text{ тј.}$$
$$(x + u, y + v) = (0, 0).$$

Обзиром на основно својство једнакости уређених парова, даље је

$$x + u = 0, \; y + v = 0, \text{ тј.}$$
$$u = -x, \quad v = -y.$$

Доказали смо да за сваки комплексни број (x, y) постоји њему **супротан** комплексан број $(-x, -y)$ такав да је њихов збир **неутралан** број, тј. 0. Супротан број

броја z уобичајено је означавати са $-z$. Умјесто $z + (-w)$ пише се и $z - w$, а то је **разлика** комплексних бројева.

Из дефиниције множења, лако провјеравамо да је и $(\mathbb{C}', \cdot)$, гдје је $\mathbb{C}' = \mathbb{C}\setminus(0,0)$, такође **комутативна група** (iv – vi), и да је множење дистрибутивно према сабирању (vii):

iv. $z\cdot w = w\cdot z$,
v. $z\cdot(w\cdot t) = (z\cdot w)\cdot t$,
vi. $z\cdot(1, 0) = z$,
vii. $z\cdot(w + t) = z\cdot w + z\cdot t$.

Докажимо још само да за сваки комплексан број $z = (x, y) \neq (0, 0)$ постоји њему инверзан (супротан у односу на операцију множења) број $z^{-1} = (u, v)$, такав да је

$$(x, y)\cdot(u, v) = (1, 0), \text{ тј.}$$
$$(xu - yv, xv + yu) = (1, 0).$$

Отуда

$$xu - yv = 1,\ \ xv + yu = 0,$$

Рјешавамо систем двије једначине по непознатима u и v. Претпостављамо да је бар један од бројева x, y различит од нуле, тј. $x^2 + y^2 \neq 0$. Рецимо да је $x \neq 0$. Ако прву (из посљедњег система) једначину помножимо са x, а другу са y, добијамо

$$x^2u - xyv = x,\ \ xyv + y^2u = 0,$$

па након сабирања

$$(x^2 + y^2)u = x.$$

Како вриједност у загради није нула, слиједи

$$u = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Из друге једначине система добијамо

$$xv = -yu = \frac{xy}{x^2 + y^2},$$

па због претпоставке ($x \neq 0$) имамо

$$v = -\frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Симетрично би радили када бисмо умјесто $x \neq 0$ узели да је $y \neq 0$, и опет бисмо дошли до истих формула. Дакле, ако је $x^2 + y^2 \neq 0$ комплексан број $z = (x, y)$ има **инверзан број**

$$z^{-1} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, -\frac{y}{x^2 + y^2}\right).$$

Уобичајено је инверзан број броја z означавати са z^{-1}, или са $\frac{1}{z}$. Умјесто $z\cdot w^{-1}$, или $z\cdot\frac{1}{w}$ пише се и zw^{-1}, или $z\frac{1}{w}$, или $\frac{z}{w}$, а то је **количник** комплексних бројева.

Доказали смо да је $(\mathbb{C}, +)$ комутативна група, да је $(\mathbb{C}', \cdot)$ комутативна група, и да важи закон дистрибуције (vii). То значи да је алгебарска структура $(\mathbb{C},+,\cdot)$ поље; то је **поље комплексних бројева**.

Коњугован комплексан број од $z = (x, y)$ је $\bar{z} = (x, -y)$. Другачије писано, бројеви

$$z = x + iy \text{ и } \bar{z} = x - iy$$

су коњуговано комплексни. Производ коњуговано комплексних бројева

$$\begin{aligned} z \cdot \bar{z} &= (x+iy)\cdot(x-iy) = \\ &= x(x-iy)+iy(x-iy) \\ &= x^2 - ixy + iyx - i^2y^2 \\ &= x^2 + y^2. \end{aligned}$$

Број $|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2+y^2}$ називамо **модул** комплексног броја $z = x + iy$. Лако провјеравамо и сљедеће особине коњугованих бројева:

I. $\bar{z}\cdot z \in \mathbb{R}_0^+$, $\bar{\bar{z}} = z$;

II. $\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}(z+\bar{z})$, $\mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z-\bar{z})$;

III. $\overline{z+w} = \bar{z}+\bar{w}$, $\overline{z-w} = \bar{z}-\bar{w}$;

IV. $\overline{z\cdot w} = \bar{z}\cdot\bar{w}$, $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$ $(w \neq 0)$;

V. $z \in \mathbb{R}$ ако и само ако $z = \bar{z}$.

Задаци 28.1.1.

1. Дати су комплексни бројеви $z_1 = (2, -3)$ и $z_2 = (-1, 2)$. Одредити:
a) $z_1 + z_2$, b) $-z_2$, c) $z_1 - z_2$, d) z_1z_2, e) z_2^{-1}, f) $z_1z_2^{-1}$.

2. Одредити реални и имагинарни дио комплексних бројева:

a) i, b) $3 - 2{,}5i$, c) $\sin t - i\cdot\cos t$ $(t \in \mathbb{R})$, d) $(3+2i)\cdot(2-3i)$, e) $\frac{1+2i}{2-i}$.

3. Доказати да је:

a) $\frac{a+ib}{c+id} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + i\frac{bc-ad}{c^2+d^2}$, када је $c^2+d^2 > 0$;

b) $\left(\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}\right)^3 = 1$;

c) $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^4 = 1$

4. Рјешити једначину:

a) $z^2 - (2 + i)z + i = 0$;
b) $2(1 + i)z^2 - 4(2 - i)z - 5 - 3i = 0$;
c) $(2 + i)z^2 - (5 - i)z + 2 - 2i = 0$.

5. Доказати неједнакости:

a) $\mathrm{Re}(z) \le |z|$;

b) $z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2 \le 2\,|z_1|\cdot|z_2|$;

c) $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$;

d) $|z_1 - z_2| \ge \big||z_1| - |z_2|\big|$;

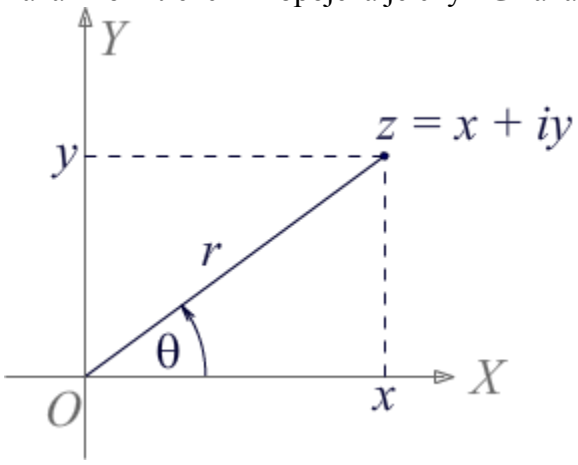
e) $|z_1 + z_2 + \ldots + z_n| \le |z_1| + |z_2| + \ldots + |z_n|,\ n \in \mathbb{N}$.

6. Ако је $z + \dfrac{1}{z} = 1$ израчунати:

a) z3, b) $z^{1000} + \dfrac{1}{z^{1000}}$.

28.2. Комплексна раван

Раван комплексних бројева је скуп **C** тачака $z = (x, y)$.



У **Декартовом** правоуглом систему координата, пројекција тачке z на апсциси је број $\mathrm{Re}(z) = x$, пројекција на ординати је $\mathrm{Im}(z) = y$. Апсцисна и ординатна оса називају се **реална и имагинарна оса** комплексне равни. Коњугован број $\bar{z} = (x, -y)$ је осно симетрична слика броја z у односу на реалну осу.

Модул $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ је удаљеност броја z од исходишта, тј. $r = |Oz|$, као што се види са горњег графа (Питагорина теорема). Угао између реалне осе и правца Oz мјерен у позитивном смјеру кретања казаљке на сату је θ. Из правоуглог троугла ΔxOz лако налазимо :

$$\cos\theta = \frac{x}{r},\ \sin\theta = \frac{y}{r},\ \text{тј.}$$
$$x = r\sin\theta,\quad y = r\cos\theta.$$

Према томе, комплексан број $z = (x, y)$ се може представити у оба облика:

$$z = x + iy,\ \text{или}\ z = r\cos\theta + ir\sin\theta.$$

Овај други се назива **тригонометријски облик** комплексног броја. Угао $\theta = \angle xOz$ назива се **аргумент** комплексног броја и означава $\theta = \arg(z)$.

Примјетимо да аргумент, број θ = arg(z) није једнозначно одређен комплексним бројем *z*. Наиме, ако неки комплексни број има аргумент θ, тада је његов аргумент и $\theta + 2k\pi$, за сваки цијели број *k*, јер је

$$\cos\theta = \cos(\theta + 2k\pi) \text{ и } \sin\theta = \sin(\theta + 2k\pi), \text{ за } k = 0, \pm1, \pm, \ldots .$$

То значи да arg(*z*) није ознака за један одређени реални број, већ за један из скупа бројева који се међусобно разликују за цјелобројни умножак пуног угла 2π, тј. 360°. По дефиницији, узима се да је |0| = 0, а аргумент броја 0 се не дефинише.

Став 28.2.1.
Два комплексна броја су једнака ако и само ако су им једнаки модули и ако постоји цијели број k такав да је разлика њихових аргумената једнака $2k\pi$. Другим рјечима,

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow |z_1| = |z_2| \wedge (\exists k \in \mathbf{Z}) \arg(z_1) - \arg(z_2) = 2k\pi.$$

Доказ: Нека је $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ и $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + \cos\theta_2)$. Ако је $r_1 = r_2$ (тј. модули су једнаки), и ако постоји $k \in \mathbf{Z}$ такво да је $\theta_1 = \theta_2 + 2k\pi$, тј. $\arg(\theta_1) = \arg(\theta_2 + 2k\pi)$ тада је очигледно $z_1 = z_2$.

Обратно, из једнакости $r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ слиједи

$$r_1\cos\theta_1 = r_2\cos\theta_2, \quad r_1\sin\theta_1 = r_2\sin\theta_2.$$

Након квадрирања и сабирања ових једнакости добијамо

$$r_1^2 = r_2^2,$$

односно, због $r_{12} > 0$ имамо

$$r_1 = r_2.$$

Са друге стране, једанкости тада постају

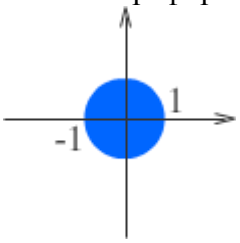
$$\cos\theta_1 = \cos\theta_2, \quad \sin\theta_1 = \sin\theta_2,$$

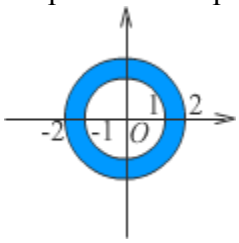
одакле слиједи да постоји цијели број *k* такав да је $\theta_1 = \theta_2 + 2k\pi$, тј. $\theta_1 - \theta_2 = 2k\pi$, чиме је став доказан. ♦

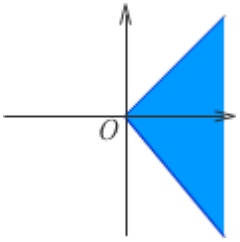
Примјер 28.2.2.
Наћи скуп тачака у равни који представља комплексне бројеве дате са:

a) |z| < 1; b) 1 < |z| < 2; c) $-\frac{\pi}{4} \le \arg z \le \frac{\pi}{4}$.

Резултати: Шрафирани дјелови на приказаним графицима.







Примјер 28.2.3.
Доказати да је производ два комплексна броја $z_{12} = r_{12}(\cos\varphi_{12} + i\sin\varphi_{12})$ једнак комплексном броју $z = r_1 r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$.

Доказ: Производ дата два комплексна броја z_{12} је комплексни број

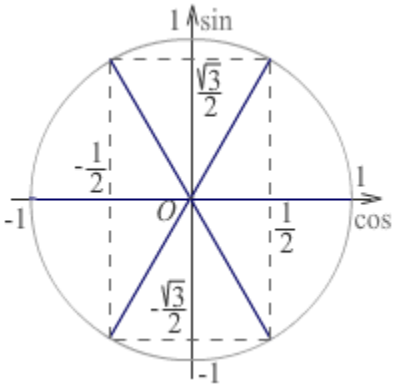
$$z = z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_2)(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$
$$= r_1 r_2[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1\cos_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2)] =$$
$$= r_1 r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)].\blacklozenge$$

Графички, множење комплексних бројева је ротација. Комплексни бројеви чији су модули r_{12} и аргументи φ_{12} дају комлексан број модула $r_1 r_2$ и аргумента $\varphi_1 + \varphi_2$. Уопште, производ $n \in \mathbf{N}$ истих комплексних бројева модула r и аргумента φ је комплексан број аргумента r^n и аргумента $n\varphi$. То је садржај сљедећег Моавровог образца (става), којег је лако доказати полазећи од претходног примјера, а затим математичком индукцијом.

Став 28.2.3.
Ако је $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, тада је $z^n = r^n[\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)]$, $n \in \mathbf{N}.\blacklozenge$

Обатно, из Моаврове формуле (28.2.3.) добијамо сљедећи начин за корјеновање комплексног броја.

Став 28.2.4.
Ако је $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, тада је $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)$, $n \in \mathbf{N}.\blacklozenge$



На примјер, $z = 1$ и $n = 6$. Знамо да 6-тих корјена броја има шест. Те бројеве из горње формуле добијамо узимајући $k = 1, 2, \ldots, 6$, а за све сљедеће веће бројеве k добијамо поновљене резултате.

Тако, корјени јединице су $\pm\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$ и наравно ±1.

Свих ових шест резултата су приказани графом лијево као врхови шест радијус вектора, тачке јединичне кружнице у комплексној равни.

Из претходних, непосредно слиједи став о дјељењу.

Став 28.2.5.
Количник комплексних бројева $z_{12} = r_{12}(\cos\varphi_{12} + i\sin\varphi_{12})$ је комплексни број

$\frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)].\blacklozenge$

Задаци 28.2.6.

1. Наћи реални и имагинарни дио комплексног броја и представити га у **C** равни:

a) $\dfrac{(1+i)^3}{(3-2i)}\left(\dfrac{2-i}{2+i}-\dfrac{3-i}{3+i}\right)$;

b) $\left(\dfrac{i^{10}-1}{i^{15}-1}\right)^8$.

2. Ако је $z_1 = 3 - 4i$, $z_2 = -2 + 3i$, $z_3 = 4 + 3i$ наћи модул и аргумент комплексног броја и представити га у комплексној равни:

a) z1 + z2; b) $z_2 - z_3$; c) $3z_1 + 2z_3$; d) $5z_2 - 4z_1$.

3. Наћи скуп тачака у равни **C** који представља комплексне бројеве:

a) $|z| \geq 2$; b) $|z| \leq 1 \wedge \mathrm{Re}(z) \geq 0$; c) $-\dfrac{\pi}{3} \leq \arg(z) \leq \dfrac{\pi}{4}$; d) $|\arg(z)| < 1 \wedge \mathrm{Im}(z) > -0{,}5$.

4. Представити у комплексном облику:

a) горњу полураван; b) трећи квадрант; c) круг $x^2 + y^2 + 2x + 2y = 0$.

5. Дати су $z_1 = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$ и $z_2 = 3\left(\cos\dfrac{\pi}{4} - i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$. Израчунати и представити резултат у тригонометријском облику:

a) $z_1 \cdot z_2$; b) $z_1 : z_2$; c) $z_1 + z_2$; d) $z_1 - z_2$.

6. Представити у тригонометријском облику:

a) $z = \sin t + i\cdot(1 - \cos t)$; b) $z = 1 + i\cdot\mathrm{tg}\, t$, $-\pi/2 < t < \pi/2$.

7. Израчунати ($n \in \mathbf{N}$, $t \in \mathbf{R}$):

a) $\left(1+\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)^n$;

b) $(1-\cos t+i\sin t)^7$;

c) $\left(\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^n+\left(\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^n$.

8. Доказати једнакост:

$$\left(\frac{1+i\,\mathrm{tg}\,t}{1-i\,\mathrm{tg}\,t}\right)^n = \frac{1+i\,\mathrm{tg}\,nt}{1-i\,\mathrm{tg}\,nt}.$$

28.3. Топологија

У скупу комплексних бројева **C** дефинисано је **растојање** између два елемента $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ са: $d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.

На овај начин су растојања у комплексној равни **C** и аналитичкој равни $\mathbf{R}^2$ једнако дефинисана. Зато кажемо да су скупови **C** и $\mathbf{R}^2$ изометрични. Диск[4] или круг са центром у тачки z_0 и полупречником r означавамо $D(z_0, r)$. То је скуп тачака z за који је $|z - z_0| < r$. Диск је основа за изучавање граничних процеса у **C**.

Дефиниција 28.3.1.
Околина тачке $z_0 \in \mathbf{C}$ је сваки скуп који садржи диск коме припада и тачка z_0.♦

Примјер 28.3.2.
Показати да је претходна дефиниција еквивалентна са сљедећом:

Околином тачке z_0 називамо сваки скуп који садржи унутрашњост правоугаоника, чије су стране паралелне осама, у којим лежи и тачка z_0.

Наравно, паралелност страна правоугаоника са осама уопште није битна.

Рјешење: Нека је скуп A околина тачке z_0 у односу на прву дефиницију (38.3.1.). Скуп A садржи диск $D(z_1, r)$ у коме лежи и тачка z_0. Нека полупречник, који пролази кроз тачку z_0 сјече кружницу $|z - z_1| = r$ у тачки z_2. Унутрашњост квадрата $|\mathrm{Re}(z - z_0)| < \frac{\sqrt{2}}{2} d(z_0, z_2)$, $|\mathrm{Im}(z - z_0)| < \frac{\sqrt{2}}{2} d(z_0, z_2)$ лежи у диску $D(z_1, r)$, а тиме и у A, па је A околина и по другој дефиницији.

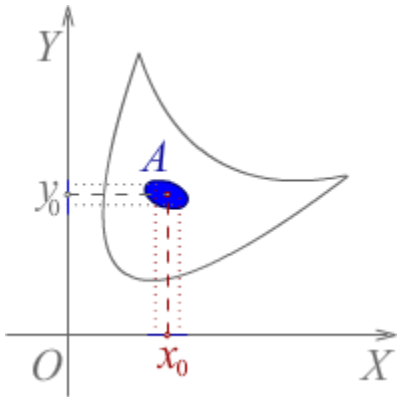
Обратно, нека је A околина тачке z_0 по другој дефиницији (28.3.2.). Постоји правоугаоник P који лежи у A и који садржи тачку z_0. Нека је ρ оно краће растојање тачке z_0 до странице правоугаоника P. Диск $D(z_0, r)$ лежи у правоугаонику P па, према томе, и у A. Зато је A околина тачке z_0 и по првој дефиницији.♦

Дефинисањем околине у **C** (као и у $\mathbf{R}^2$) тај скуп је постао **тополошки простор**. Кажемо да јеу **C** дефинисана **топологија**.

Став 28.3.3.
Потребан и довољан услов да је скуп A из **C** околина тачке $z_0 = (x_0, y_0)$ је да нормална пројекција R_x скупа A на реалну осу буде околина тачке x_0, а нормална пројекција R_y скупа A на имагинарну осу, околина y_0.

Доказ: Претпоставимо да је A околина тачке $z_0 = (x_0, y_0)$. По дефиницији, A садржи

[4] Др Богољуб Станковић: ТЕОРИЈА ФУНКЦИЈА КОМПЛЕКСНЕ ПРОМЈЕНЉИВЕ, Научна књига, Београд, 1972.



унутрашњост правоугаоника у којем лежи тачка z_0, чије су стране паралелне осама. R_x као нормална пројекција скупа A на **R** садржи отворен интервал у коме лежи реални дио од z_0, а који је дефинисан страницом правоугаоника. R_x је околина од x_0 по дефиницији околине у **R**. На исти начин је и R_y околина од y_0 по дефиницији околине у **R**.

Обрнуто, претпоставимо да је R_x околина тачке x_0, а R_y околина тачке y_0. То значи да R_x садржи отворен интервал I_x у коме лежи x_0, а R_y отворен интервал I_y у коме лежи y_0. Како је $\vec{A} = \overrightarrow{R_x} \times \overrightarrow{R_y}$, то $\vec{A}$ садржи правоугаоник $\overrightarrow{I_x} \times \overrightarrow{I_y}$, а који садржи тачку $z_0 = (x_0, y_0)$ и представља околину тачке z_0 .♦

Дефиниција 28.3.4.
Скуп комплексних бројева је **ограничен** ако постоји диск коначног полупречника у коме лежи дати скуп.♦

По сљедећој дефиницији, отворен скуп је једнак својој унутрашњости.

Дефиниција 28.3.5.
Руб скупа A је је скуп комплексних бројева у чијој свакој околини леже бар један елеменат из A и један из комплементарног скупа од A.♦

Дефиниција 28.3.6.
Тачка z_a је **адхерентна** за скуп A ако свака околина тачке z_a садржи садржи бар једну тачку из A.♦

На примјер, ако тачка припада скупу она му је и адхерентна, јер је она та тачка која припада својој околини. Свака тачка руба скупа је адхерентна томе скупу. Тачка може бити адхерентна за скуп, али му не мора припадати; тачка руба отвореног скупа је адхерентна, али му не припада.

Скуп A је **густ** у B, ако је свака тачка из B адхерентна за A. То значи да у свакој околини сваке тачке из B мора лежати бар једна тачка из A.

Став 28.3.7.
Потребан и довољан услов да је F затворен скуп у **C** је да му припадају све његове адхерентне тачке.

Доказ: Претпоставимо да је скуп F затворен а да његова адхерентна тачка z_a припада његовом комплементарном скупу. Комплементарни скуп је отворен и није празан, па је околина тачке z_a.У тој околини нема ни једне тачке из F. То је супротно са претпоставком да је z_a адхерентна тачка за F. Зато мора припадати скупу F.

Претпоставимо да све адхерентне тачке од F припадају F. Нека је z_a тачка комплементарног скупа од F. z_a није адхерентна за F па постоји околина од z_a која цијела лежи у комплементу од F. То значи да је комплементаран скуп од F отворен, односно F је затворен скуп.♦

За тачку $z \in A$ кажемо да је **изолована** ако постоји околина те тачке у којој нема других тачака из A. Из претходног става слиједи да је скуп који се састоји од изолованих тачака затворен.

Дефиниције реалног низа и граничне вриједности се лако проширују на скуп комплексних бројева.

Функција која врши обострано једнозначно пресликавање скупа природних бројева на подскуп комплексних бројева зове се **низ комплексних бројева**. Рецимо, такви су сљедећи низови: $\{(1 + i)^n\}$, $\{(1 + i)/n\}$, $\{[1 – (-1)^n]\cdot n\}$.

Низ комплексних бројева $\{z_n\}$ је **ограничен** ако је скуп комплексних бројева z_n ограничен у **C**, тј. ако постоји такав позитиван M да је $|z_n| \le M$ за све $n \in \mathbf{N}$. То значи да све тачке z_n леже у кругу полупречника M са центром у O. У претходним примјерима, други низ је ограничен, јер је

$$\left|\frac{1+i}{n}\right| = \frac{|1+i|}{n} = \frac{\sqrt{2}}{n} \le \sqrt{2},\ n \in \mathbf{N}.$$

Први примјер није ограничен низ, јер је

$$|(1+i)^n| = |1+i|^n = (\sqrt{2})^n.$$

Како је $\sqrt{2} > 1$, то $(\sqrt{2})^n \to \infty$, када $n \to \infty$. Ни трећи примјер није ограничен низ.

Став 28.3.8.
Потребан и довољан услов да низ $\{z_n = x_n + iy_n\}$ буде ограничен је да су реални низови $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ ограничени.

Доказ: слиједи из: $|\mathrm{Re}\ z_n| \le |z_n|$, $|\mathrm{Im}\ z_n| \le |z_n|$, $|\mathrm{zn}| \le |\mathrm{Re}\ z_n| + |\mathrm{Im}\ z_n|$.♦

Тачка нагомилавања низа $\{z_n\}$ је онај комплексан број у чијој свакој околини има неограничено много чланова низа.

Тачка нагомилавања низа је адхерентна тачка скупа вриједности низа. Обрнуто није тачно. На примјер, i је адхерентна тачка низа $\{i/n\}$ али му није тачка нагомилавања. Један низ може имати више тачака нагомилавања. Низ $\{(1 + i)/n\}$ има само једну тачку нагомилавања, низ $\{(1 + i)^n\}$ нема тачака нагомилавања, док низ $\{[1 – (-1)^n]\cdot n\}$ има четири тачке нагомилавања: 0, 2, $1 + i$, $1 – i$.

Став 28.3.9.
Ако је z тачка нагомилавања низа $\{z_n = x_n + iy_n\}$, $\mathrm{Re}(z)$ је тачка нагомилавања низа $\{x_n\}$, а $\mathrm{Im}(z)$ тачка нагомилавања низа $\{y_n\}$. Обрнуто није тачно.

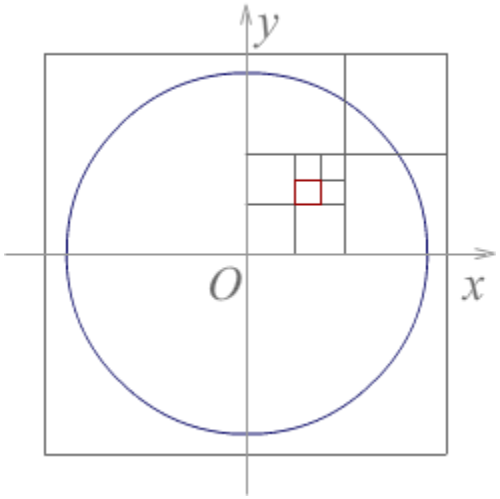
Доказ: Претпоставимо да је z тачка нагомилавања низа $\{z_n\}$. У свакој околини тачке z лежи неограничено чланова z_{k_n} низа $\{z_n\}$. Пројекција околине тачке z на реалну осу, према ставу 28.3.3, је околина $\mathrm{Re}(z)$ и у њој леже $\mathrm{Re}(z_{k_n})$, па је $\mathrm{Re}(z)$ тачка нагомилавања низа $\{\mathrm{Re}(z_n) = x_n\}$. На исти начин се доказује и за имагинарни дио.

Да обратно није тачно показује сљедећи примјер: $\{n[1 + (-1)^n] + in[1 + (-1)^{n-1}]\}$. Реални дио има тачку нагомилавања 0, јер су сви реални дјелови за непарно n нуле. Имагинарни дио такође има тачку нагомилавања 0. Сам низ нема тачке нагомилавања, нити је 0 тачка нагомилавања, јер у круг са центром у 0 и полупречником 1 не пада ни један члан низа.♦

Сљеди позната Болцано-Вајерштрасова теорема (27.2.3.) коју овдје доказујемо.

Став 28.3.10.
Ограничен низ има бар једну тачку нагомилавања.

Доказ: Нека је низ $\{z_n\}$ ограничен. Постоји круг са центром у O коначног полупречника унутар кога леже тачке z_n. Но, тада постоји и квадрат у коме леже све тачке тог низа. Координатне осе дјеле квадрат на четири дјела. Бар у једном квадранту, означимо га K_1, мора се налазити неограничено много чланова низа. Тај квадрант подјелимо даље са двије праве паралелне координатним осама. Бар у једном квадрату нове подјеле мора бити неограничено много елемената низа. Нека је тај квадрат K_2. На исти начин настављамо подјеле и добијамо низ квадрата $\{K_m\}$. У сваком таквом квадрату лежи неограничено



много тачака z_{m_n} низа $\{z_n\}$. Пројекције тих квадрата на реалну и имагинарну осу представљају два низа дужи. У оба низа, свака дуж лежи у претходној, а њихове дужине теже нули. Због аксиома о непрекидности бројне линије, постоји једна и само једна тачка x на реалној оси и једна и само једна тачка y на имагинарној оси која лежи у свим дужима одговарајућег низа дужи. Тачка $z = x + iy$ је тачка нагомилавања низа $\{z_n\}$. У свакој њеној околини лежи бар један квадрат K_n, јер стране квадрата теже нули, а у сваком од њих лежи тачка z_n. Сваки квадрат K_n садржи бесконачно чланова низа $\{z_n\}$, па је $x + iy$ стварно тачка нагомилавања низа $\{z_n\}$.♦

Став 28.3.11.
Сваком затвореном скупу у C припадају све тачке нагомилавања свих низова из тог скупа.♦

Тачка нагомилавања низа је адхерентна тачка за скуп коме припада низ, па доказ последњег тврђења лако слиједи из особина адхерентних тачака.

Задаци 28.3.12.
1. Који је од сљедећих низова ограничен?

$$\{i^n\},\ \left\{\left(\frac{1}{1+i}\right)^n\right\},\ \left\{\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n\right\},\ \left\{\frac{n}{2n+1}+i\frac{n-1}{n}\right\},\ \{n^2(i^n-1)\}.$$

2. Ако је низ $\{z_n\}$ ограничен, показати да је то

$$i\left\{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} z_j\right\},\ \left\{\frac{\sum_{j=1}^{n} p_j z_j}{\sum_{j=1}^{n} p_j},\ p_j>0\right\},\ \left\{\sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n} z_j}\right\}.$$

3. Које тачке нагомилавања имају низови под 1?♦

Дефиниција 28.3.13.
Низ $\{z_n\}$ **конвергира** ка комплексном броју z ако изван сваке околине од z остаје само коначан број чланова низа. Број z називамо границом, или лимесом низа и пишемо $\lim_{n\to\infty} z_n = z$.♦

На примјер, низ $\{1 + i/n\}$ конвергира ка 1. Узмемо ли произвољну околину јединице, она садржи диск облика $|z - 1| < r$. Изван овога диска лежи коначан број чланова низа и то за оне n за које је $|1 + i/n - 1| = |i/n| \geq r$, односно за $n \leq 1/r$. Ако изван овог диска лежи коначан број чланова низа, тим прије коначан број лежи и изван околине којој припада диск.

Из саме дефиниције границе слиједи да је граница и тачка нагомилавања низа. Обрнуто није тачно. За низ $\{1 + i^n\}$ је 0 тачка нагомилавања, али 0 није граница. Изван круга $|z| \leq 1$, који је околина тачке 0, леже сви чланови низа за које је $n = 4k$, а таквих је бесконачно много.

Може се доказати да је претходна (13.) дефиниција еквивалентна сљедећој.

Дефиниција 28.3.14.
Низ $\{z_n\}$ **конвергира** ка комплексном броју z ако за свако $\varepsilon > 0$ постоји n_0, које зависи од ε, такво да је $|z - z_n| < \varepsilon$ та све $n > n_0$.

Доказ еквивалентности дефиниција 13 и 14. Претпоставимо да низ $\{z_n\}$ конвергира по дефиницији 13. Сваки отворени диск је истовремено и околина, па слиједи да се изван диска полупречника ε налази највише коначан број чланова низа $\{z_n\}$, тј. $|z - z_n| < \varepsilon$ мора бити задовољено почев од неког $n = n_0$.

Обрнуто, нека је низ конвергентан по дефиницији 14. Произвољна околина тачке z садржи бар један диск полупречника ε. По дефиицији 14, изван тог диска има само коначан број чланова низа $\{z_n\}$, па и изван околине у којој лежи тај диск може бити само коначан број чланова низа.♦

Став 28.3.15.
Сваки конвергентан низ је ограничен и има само једну тачку нагомилавања. Обрнуто, сваки низ који је ограничен и има само једну тачку нагомилавања је ограничен.

Доказ. Ако низ $\{z_n\}$ конвергира ка z, изван круга полупречника r, а који садржи и тачку z, може бити само коначан број чланова низа. Ако полупречник r повећамо тако да је већи и од највећег модула преосталих чланова, добићемо круг у којем леже сви чланови низа, а то значи да је низ ограничен.

Претпоставимо да низ има двије тачке нагомилавања. Једна је сигурно граница. Нека је друга $z' \neq z$. Нека је њихово растојање $d(z', z) = p$. Опишимо око сваке од тачака z' и z круг полупречника $r < p/2$. Та два круга немају заједничких тачака. Изван сваке околине тачке z, а тиме и изван описаног круга, има само коначан број тачака низа. Због тога се у кругу око z' може наћи само коначан број чланова низа, па z' није тачка нагомилавања тога низа. Добили смо да може бити само једна тачка нагомилавања.

Претпоставимо сада да низ $\{z_n\}$ има само једну тачку нагомилавања и да је ограничен. Нека је та тачка нагомилавања z. Опишимо произвољну околину око ове тачке. Изван те околине има само коначан број тачака датог низа, јер би у противном имао бар још једну тачку нагомилавања различиту од z (в. Болцано-Вајерштрасов став 28.3.10.). Према дефиницији 3. је z граница низа $\{z_n\}$.♦

Задаци 28.3.16.
1. Који је од низова задатка 28.3.12.1. конвергентан?

2. Показати да ако низ $\{z_n\}$ конвергира ка z, тада низ $\{|z_n|\}$ конвергира ка $|z|$. Обрнуто није тачно.

3. Ако је $\lim |z_n| = 0$ тада је и $\lim z_n = 0$.

4. Доказати: Потребан и довољан услов да низ $\{z_n\}$ конвергира ка z је да низ $\{\mathrm{Re}\ z_n\}$ конвергира ка $\mathrm{Re}\ z$ и $\{\mathrm{Im}\ z_n\}$ конвергира ка $\mathrm{Im}\ z$.

5. Конструисати низ који има само једну тачку нагомилавања, а није конвергентан.